Elementos de Elasticidad:

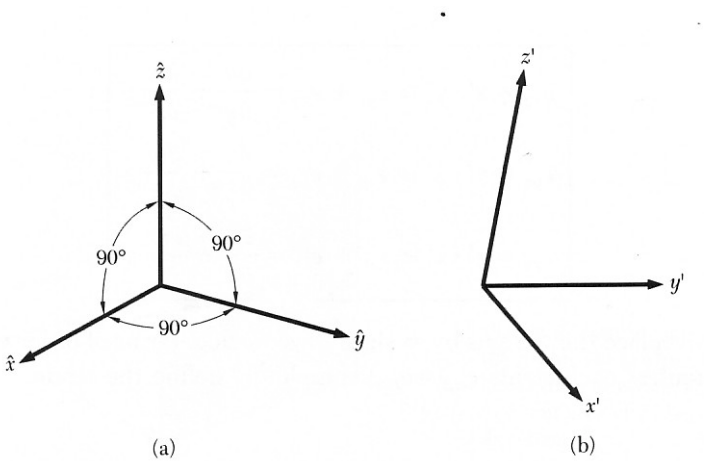
Consideremos el sólido como un continuo.

Ondas de $\lambda \sim 10^{-6}$ cm $\nu \sim 10^{+11}, 10^{+12}$ Hz.

Ley de Hooke: Las deformaciones son proporcionales a las fuerzas que las provocan.
Si no se cumple, estamos en la zona no lineal o plástica.

No distinguimos entre transformación adiabática o isoterma.

Coeficientes deformación: $\varepsilon_{\alpha\beta} << 1$ adimensional.



$$\mathbf{x}' = (1 + \epsilon_{xx})\hat{\mathbf{x}} + \epsilon_{xy}\hat{\mathbf{y}} + \epsilon_{xz}\hat{\mathbf{z}} \;;$$
$$\mathbf{y}' = \epsilon_{yx}\hat{\mathbf{x}} + (1 + \epsilon_{yy})\hat{\mathbf{y}} + \epsilon_{yz}\hat{\mathbf{z}} \;;$$
$$\mathbf{z}' = \epsilon_{zx}\hat{\mathbf{x}} + \epsilon_{zy}\hat{\mathbf{y}} + (1 + \epsilon_{zz})\hat{\mathbf{z}} \;.$$

La longitud de los vectores no se tienen que conservar:

$$|\mathbf{x'}|^2 = \mathbf{x'}.\mathbf{x'} = 1 + 2\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 \quad \Rightarrow \quad x' = 1 + \varepsilon_{xx} + ...$$

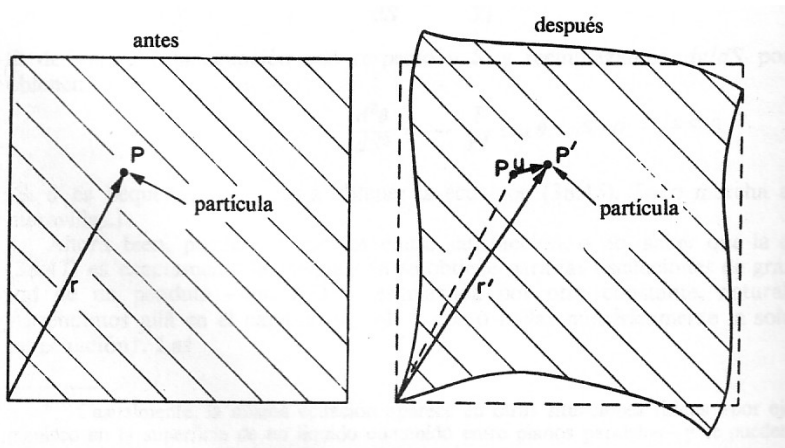
Luego los elementos ε_{xx} , en primera aproximación, las variaciones relativas de longitud de los vectores unitarios.

Sea un punto en $\mathbf{r} = x\,\mathbf{x} + y\,\mathbf{y} + z\,\mathbf{z}$. ¿Donde estará después de la deformación?.

$$\mathbf{r'} = x\,\mathbf{x'} + y\,\mathbf{y'} + z\,\mathbf{z'}.$$

El desplazamiento **R** de la deformación se define como

$$\mathbf{R} = (\mathbf{r'}-\mathbf{r}) = x\,(\mathbf{x'} - \mathbf{x}) + y\,(\mathbf{y'}-\mathbf{y}) + z\,(\mathbf{z'}-\mathbf{z}) = (\,x\varepsilon_{xx} + y\varepsilon_{yx} + z\varepsilon_{zx}\,)\,\mathbf{x} + (\,x\varepsilon_{xy} + y\varepsilon_{yy} + z\varepsilon_{zy}\,)\,\mathbf{y} + (\,x\varepsilon_{xz} + y\varepsilon_{yz} + z\varepsilon_{zz}\,)\,\mathbf{z}\,.$$



Definamos u(**r**), v(**r**), w(**r**) tal que,

$$\boxed{\mathbf{R(r)} = u(\mathbf{r})\,\mathbf{x} + v(\mathbf{r})\,\mathbf{y} + w(\mathbf{r})\,\mathbf{z}.}$$

Desarrollando cerca de r = 0 y tomando R(0) = 0,

$u(r) = u(0) + x\partial u/\partial x + y\partial u/\partial y + z\partial u/\partial z$. Y comparando queda

$$x\epsilon_{xx} = x\frac{\partial u}{\partial x} \; ; \qquad y\epsilon_{yx} = y\frac{\partial u}{\partial y} \; ;$$

Definimos el tensor de deformaciones $e_{\alpha\beta}$:

$$e_{xx} \equiv \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \; ; \qquad e_{yy} \equiv \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \; ; \qquad e_{zz} \equiv \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \; ;$$

$$e_{xy} \equiv \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' \cong \epsilon_{yx} + \epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \; ;$$

$$e_{yz} \equiv \mathbf{y}' \cdot \mathbf{z}' \cong \epsilon_{zy} + \epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \; ;$$

$$e_{zx} \equiv \mathbf{z}' \cdot \mathbf{x}' \cong \epsilon_{zx} + \epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \; .$$

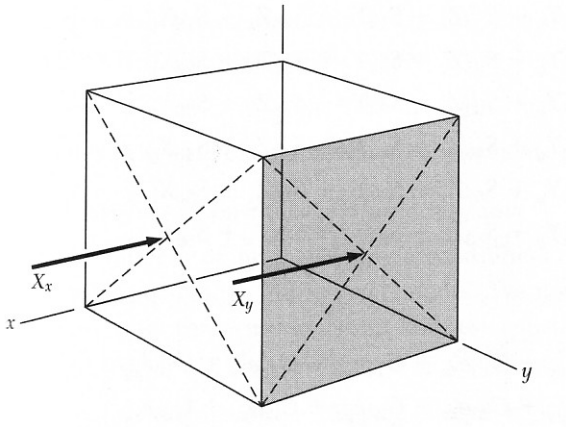
Es un tensor simétrico $e_{\alpha\beta} = e_{\beta\alpha}$ luego tiene 6 componentes distintas.

Las componentes diagonales dan el alargamiento, las no diagonales los cambios de ángulos (cortes).

ATENCION: diferencia de definición entre Kittel y Landau o Feynman

Tensor de esfuerzos (tensiones):

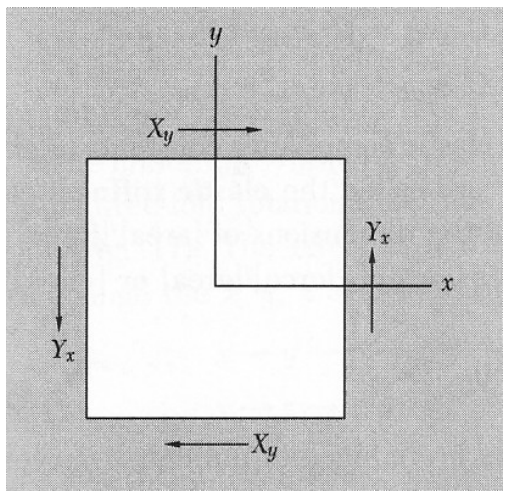
Un esfuerzo (o tensión) es una fuerza actuando sobre la unidad de superficie. Dimensiones de presión.



σ_{xy} = [Fuerza en X] / [área perpendicular a Y] = X_y

El tensor es por tanto:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



El tensor es simétrico si no permitimos movimientos de rotación. Tiene entonces 6 componentes.

La fuerza sobre una superficie es $d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{n}\,da$ donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario perpendicular a dicha superficie.

Constantes elásticas de rigidez y deformación:

La ley de Hooke establece la proporcionalidad entre las deformaciones (tensor de) y las fuerzas (tensor de esfuerzos).

$$
\begin{aligned}
e_{xx} &= S_{11}X_x + S_{12}Y_y + S_{13}Z_z + S_{14}Y_z + S_{15}Z_x + S_{16}X_y \;; \\
e_{yy} &= S_{21}X_x + S_{22}Y_y + S_{23}Z_z + S_{24}Y_z + S_{25}Z_x + S_{26}X_y \;; \\
e_{zz} &= S_{31}X_x + S_{32}Y_y + S_{33}Z_z + S_{34}Y_z + S_{35}Z_x + S_{36}X_y \;; \\
e_{yz} &= S_{41}X_x + S_{42}Y_y + S_{43}Z_z + S_{44}Y_z + S_{45}Z_x + S_{46}X_y \;; \\
e_{zx} &= S_{51}X_x + S_{52}Y_y + S_{53}Z_z + S_{54}Y_z + S_{55}Z_x + S_{56}X_y \;; \\
e_{xy} &= S_{61}X_x + S_{62}Y_y + S_{63}Z_z + S_{64}Y_z + S_{65}Z_x + S_{66}X_y \;.
\end{aligned}
$$

$S_{\alpha\beta}$, constantes elásticas de deformación.

$$
\sigma_{ij} = \sum_{kl} C_{ij,kl} e_{kl}
$$

$$
\begin{aligned}
X_x &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} + C_{14}e_{yz} + C_{15}e_{zx} + C_{16}e_{xy} \;; \\
Y_y &= C_{21}e_{xx} + C_{22}e_{yy} + C_{23}e_{zz} + C_{24}e_{yz} + C_{25}e_{zx} + C_{26}e_{xy} \;; \\
Z_z &= C_{31}e_{xx} + C_{32}e_{yy} + C_{33}e_{zz} + C_{34}e_{yz} + C_{35}e_{zx} + C_{36}e_{xy} \;; \\
Y_z &= C_{41}e_{xx} + C_{42}e_{yy} + C_{43}e_{zz} + C_{44}e_{yz} + C_{45}e_{zx} + C_{46}e_{xy} \;; \\
Z_x &= C_{51}e_{xx} + C_{52}e_{yy} + C_{53}e_{zz} + C_{54}e_{yz} + C_{55}e_{zx} + C_{56}e_{xy} \;; \\
X_y &= C_{61}e_{xx} + C_{62}e_{yy} + C_{63}e_{zz} + C_{64}e_{yz} + C_{65}e_{zx} + C_{66}e_{xy} \;.
\end{aligned}
$$

$$
C_{ij,kl} = C_{\alpha\beta}
$$

Constantes elásticas de rigidez. (36 componentes).
Dimensiones [fuerza]/[área]
[energía]/[volumen]

Energía Elástica:

La energía (por unidad de volumen) asociada a deformaciones está dada por la expresión:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\sum_{ijkl} \tilde{C}_{ij,kl} e_{ij} e_{kl} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \tilde{C}_{\alpha\beta} e_{\alpha} e_{\beta}}$$

Donde los índices α,β =1 ... 6. 1 ≡ xx, 2 ≡ yy, 3 ≡ zz, 4 ≡ yz, 5 ≡ zx, 6 ≡ xy.

A partir de la energía los componentes del tensor de esfuerzos se calculan como derivadas respecto de e_{α}.

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial U}{\partial e_{xx}} \equiv \frac{\partial U}{\partial e_1} = \tilde{C}_{11} e_1 + \frac{1}{2}\sum_{\beta=2}^{6} \left(\tilde{C}_{1\beta} + \tilde{C}_{\beta 1}\right) e_{\beta}$$

Comparando con la expresión anterior: $C_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\tilde{C}_{\alpha\beta} + \tilde{C}_{\beta\alpha}\right) = C_{\beta\alpha}$

Luego las $C_{\alpha\beta}$ son simétricas y por tanto hay 21 distintas, pero se pueden reducir más por simetría.

Constantes elásticas en el sistema cúbico:

Apliquemos las operaciones de simetría del sistema cúbico para ver cuantas constantes elásticas distintas tenemos. Son sólo tres C_{11}, C_{44} y C_{12}.

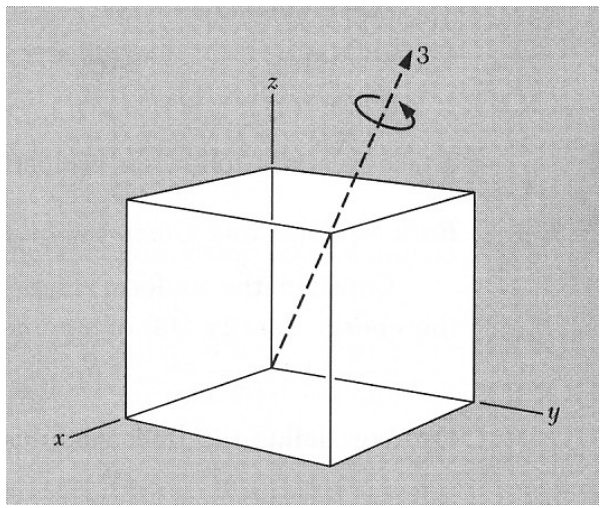
La energía debe ser invariante bajo las operaciones de simetría. Sólo pueden aparecer los términos

$$U = \frac{1}{2}C_{11}\left(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2\right) + \frac{1}{2}C_{44}\left(e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2\right) + C_{12}\left(e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx} + e_{xx}e_{yy}\right)$$

Estos términos son invariantes bajo los rotaciones de orden 3 (120º). Estas rotaciones (4) cambian los ejes:

$x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ $\quad$ $-x \rightarrow z \rightarrow -y \rightarrow -x$

$x \rightarrow z \rightarrow -y \rightarrow x$ $\quad$ $-x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow -x$



Sin embargo términos del tipo $(e_{xx}e_{xy} + \ldots)$; $(e_{yz}e_{zx} + \ldots)$; $(e_{xx}e_{xy} + \ldots)$ ... No son invariantes ya que $e_{xy} = -e_{x,-y}$.

A partir de la energía podemos calcular los esfuerzos:

$$\frac{\partial U}{\partial e_{xx}} = \sigma_{xx} = C_{11} e_{xx} + C_{12}\left(e_{yy} + e_{zz}\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial e_{xy}} = \sigma_{xy} = C_{44} e_{xy}$$

$C_{12} = C_{13}$; $C_{14}=C_{15}=C_{16} = 0$;

$C_{61}=C_{62}=C_{63} = C_{64}=C_{65} = 0$;

$C_{66}=C_{44}$;

	e_{xx}	e_{yy}	e_{zz}	e_{yz}	e_{zx}	e_{xy}
X_x	C_{11}	C_{12}	C_{12}	0	0	0
Y_y	C_{12}	C_{11}	C_{12}	0	0	0
Z_z	C_{12}	C_{12}	C_{11}	0	0	0
Y_z	0	0	0	C_{44}	0	0
Z_x	0	0	0	0	C_{44}	0
X_y	0	0	0	0	0	C_{44}

Invirtiendo la matriz:

$C_{44} = 1/S_{44}$; $C_{11} - C_{12} = (S_{11} - S_{12})^{-1}$

$C_{11}+2C_{12} = (S_{11}+2S_{12})^{-1}$

Dilatación : El cubo unidad (**x**, **y**, **z**) se transforma en el (**x'**,**y'**,**z'**).

El nuevo volumen es: V' = x'.y' × z'

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' \times \mathbf{z}' = \begin{vmatrix} 1+\epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & 1+\epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & 1+\epsilon_{zz} \end{vmatrix} \cong 1 + e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$$

$$\delta \equiv \frac{V' - V}{V} \cong e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \ .$$ Coeficiente de dilatación.

Módulo de Compresibilidad: Consideremos una dilatación uniforme $e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = 1/3\delta$. La energía del cristal cúbico es $U=1/6\ (C_{11}+2C_{12})\ \delta^2$.

Definimos el módulo de compresibilidad $U= ½\ B\ \delta^2$.
Es equivalente a $B= -V\ dp/dV$.

Luego para un cristal cúbico $B=1/3\ (C_{11}+2C_{12})$

Compresibilidad : K= 1/B

Crystal	Stiffness constants, in 10^{12} dyne/cm^2 (10^{11} N/m^2) C_{11}	C_{12}	C_{44}	Temperature, K	Density, g/cm^3
W	5.326	2.049	1.631	0	19.317
	5.233	2.045	1.607	300	—
Ta	2.663	1.582	0.874	0	16.696
	2.609	1.574	0.818	300	—
Cu	1.762	1.249	0.818	0	9.018
	1.684	1.214	0.754	300	—
Ag	1.315	0.973	0.511	0	10.635
	1.240	0.937	0.461	300	—
Au	2.016	1.697	0.454	0	19.488
	1.923	1.631	0.420	300	—
Al	1.143	0.619	0.316	0	2.733
	1.068	0.607	0.282	300	—
K	0.0416	0.0341	0.0286	4	
	0.0370	0.0314	0.0188	295	
Pb	0.555	0.454	0.194	0	11.599
	0.495	0.423	0.149	300	—
Ni	2.612	1.508	1.317	0	8.968
	2.508	1.500	1.235	300	—
Pd	2.341	1.761	0.712	0	12.132
	2.271	1.761	0.717	300	—

	Stiffness constants, in 10^{12} dyne/cm^2 or 10^{11} N/m^2 C_{11}	C_{12}	C_{44}
Diamond	10.76	1.25	5.76
Na	0.073	0.062	0.042
Li	0.135	0.114	0.088
Ge	1.285	0.483	0.680
Si	1.66	0.639	0.796
GaSb	0.885	0.404	0.433
InSb	0.672	0.367	0.302
MgO	2.86	0.87	1.48
NaCl	0.487	0.124	0.126

Otras estructuras cristalinas:

triclinique 21
monoclinique . . . 13
orthorhombique . . . 9
tétragonal (C_4, S_4, C_{4h}) 7
tétragonal (C_{4v}, D_{2d}, D_4, D_{4h}) 6
rhomboédrique (C_3, S_6) 7
rhomboédrique (C_{3v}, D_3, D_{3d}) 6
hexagonal 5
cubique 3

triclinique 18
monoclinique 12
orthorhombique . . . 9
tétragonal 6
rhomboédrique . . . 6
hexagonal 5
cubique 3

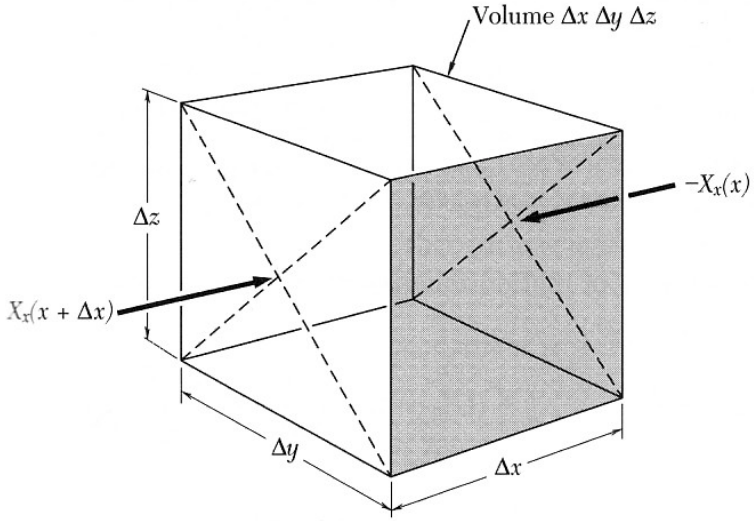
Ondas elásticas en el sistema cúbico:

Veamos la dinámica de un cubo de volumen $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$.

$$\sigma_{xx}(x+\Delta x)=\sigma_{xx}(x)+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\Delta x$$

$$\sigma_{xy}(y+\Delta y)=\sigma_{xy}(y)+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}\Delta y$$

$$\sigma_{xz}(z+\Delta z)=\sigma_{xz}(z)+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\Delta z$$



$$F_x=[\sigma_{xx}(x+\Delta x)-\sigma_{xx}(x)]\Delta y\Delta z+$$
$$+[\sigma_{xy}(y+\Delta y)-\sigma_{xy}(y)]\Delta x\Delta z+$$
$$+[\sigma_{xz}(z+\Delta z)-\sigma_{xz}(z)]\Delta x\Delta z=\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

Aplicando la 2ª Ley de Newton a ese elemento de volumen

$$\rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Y aplicando ahora la ley de Hooke:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial e_{xx}}{\partial x} + C_{12} \left(\frac{\partial e_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zz}}{\partial x} \right) + C_{44} \left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial z} \right) \; ;$$

Usando las definiciones de las e_{ij} se obtiene para las 3 componentes de **R**:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial z} \right)$$

(5

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \, \partial z} \right) \; ;$$

(5

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \, \partial z} \right)$$

(5

Ondas en la dirección [100] : el vector de ondas **k** = (K,0,0) donde $K=2\pi/\lambda$.

Ondas longitudinales : $u = u_0 \exp[i(Kx-\omega t)]$ y sustituyendo $\omega^2 \rho = C_{11} K^2$.

$$v_L = (C_{11}/\rho)^{1/2} .$$

Ondas transversales : $v = v_0 \exp[i(Kx-\omega t)]$ y sustituyendo $\omega^2 \rho = C_{44} K^2$.

$$v_T = (C_{44}/\rho)^{1/2}$$

Y lo mismo para w . (esto no es cierto, en general).

Ondas en la dirección [110] : el vector de ondas **k** = $(K_x,K_y,0)= 2^{-1/2} (K,K,0)=$

Probemos una solución transversal en el eje z:

$$w= w_0 \exp[i(K_x x + K_y y -\omega t)]$$ y sustituyendo da

$$\omega^2 \rho = C_{44} (K_x^{\,2} + K_y^{\,2}) = C_{44} K^2$$

Luego $$v_{T1} = (C_{44}/\rho)^{1/2}$$

Veamos ahora una solución general en el plano XY.

$u = u_0 \exp[i(K_x x + K_y y - \omega t)]$ y $v = v_0 \exp[i(K_x x + K_y y - \omega t)]$

Sustituyendo en las ecuaciones de onda encontramos:

$$\omega^2 \rho u = (C_{11}K_x^2 + C_{44}K_y^2)u + (C_{12} + C_{44})K_x K_y v \ ;$$
$$\omega^2 \rho v = (C_{11}K_y^2 + C_{44}K_x^2)v + (C_{12} + C_{44})K_x K_y u \ .$$

Estas ecuaciones tienen soluciones no triviales $u \neq 0$ y $v \neq 0$ si

$$\begin{vmatrix} -\omega^2\rho + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{44})K^2 & \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44})K^2 \\ \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44})K^2 & -\omega^2\rho + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{44})K^2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Las raíces del determinante son:

1ª $\omega^2\rho = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12} + 2C_{44})K^2$; 2ª $\omega^2\rho = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})K^2$

Sustituyendo las raíces en el determinante:

1º $$\tfrac{1}{2}(C_{11} + C_{12} + 2C_{44})K^2u = \tfrac{1}{2}(C_{11} + C_{44})K^2u + \tfrac{1}{2}(C_{12} + C_{44})K^2v$$

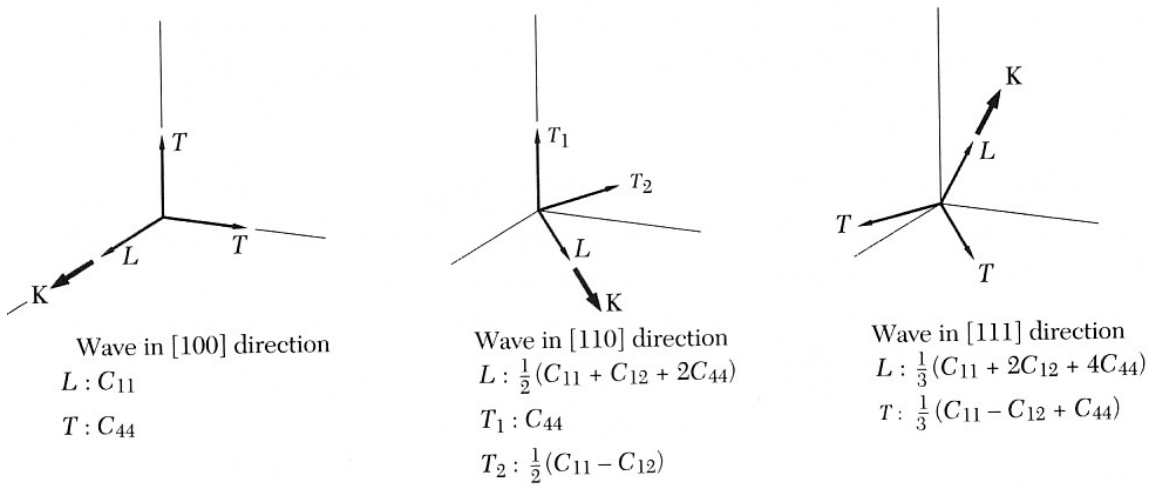
Es decir $u = v$ y por tanto el desplazamiento lleva la dirección [110]. LONGITUDINAL.

Luego $v_L = [(C_{11} + C_{12} + 2\,C_{44})/\,2\rho]^{1/2}$

2º $$\tfrac{1}{2}(C_{11} - C_{12})K^2u = \tfrac{1}{2}(C_{11} + C_{44})K^2u + \tfrac{1}{2}(C_{12} + C_{44})K^2v$$

Es decir $u = -v$ y por tanto el desplazamiento es perpendicular a la dirección [110]. TRANSVERSAL.

Luego $v_{T2} = [(C_{11} - C_{12})\,/\,2\rho]^{1/2}$



Sistema Isótropo (no cristalino): Todavía más simétrico. Da igual la dirección de los ejes. Sólo hay dos coeficientes independientes

$$C_{11} = (C_{12} + 2C_{44}) \;\; ;$$

La ley de Hooke:

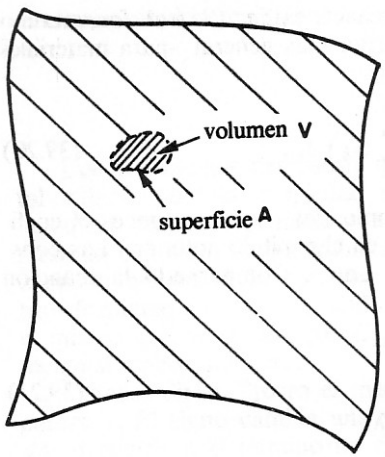
$$\sigma_{ij} = (\mu + \mu\, \delta_{ij})\, e_{ij} + \lambda\, (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})\, \delta_{ij} \;\; ;\text{(definición Kittel)}$$

$$\sigma_{ij} = 2\, \mu\, e_{ij} + \lambda\, (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})\, \delta_{ij} \;\; ;\text{ (definición Landau-Feynman)}$$

Donde μ y λ se llaman las constantes elásticas de Lamé.

$$C_{12} = \lambda \; ; \quad C_{44} = \mu \; ; \quad C_{11} = 2\,\mu + \lambda \; ;$$

Dinám



: Sobre el volumen V actúan $F_{ext} + F_{int}$

$$\vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int} = \int \rho \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} dV$$

$$\text{o} \quad \vec{F}_{int} = \int \left(-\vec{f}_{ext} + \rho \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dV = \int \vec{f} dV$$

Las componentes de F_{int} en la el elemento de área da es :

$dF_x = (\sigma_{xx}\, n_x + \sigma_{xy}\, n_y + \sigma_{xz}\, n_z)\, da$ e integrando a través del área

$$\int_A \left(\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z\right) da = \int_V f_x dV$$

Usando la ley de Gauss para la primera integral

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dV = \int_V f_x dV$$

luego $$f_i = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Ahora insertando la ley de Hooke y con la definición de las e_{ij} :

$$\boxed{\vec{f} = (\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{R}) + \mu \nabla^2 \vec{R}}$$ Navier

Ondas elásticas en medios isótropos: Si asumimos que no hay fuerzas externas

$$\rho \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = (\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{R}) + \mu\nabla^2\vec{R}$$

Todo campo vectorial se puede escribir como suma de 2 campos:

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \quad \text{tal que} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{r}_1 = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla}\times\vec{r}_2 = 0$$

$$\rho \frac{d^2(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)}{dt^2} = (\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}_2) + \mu\nabla^2(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$$

Tomando la divergencia e intercambiando ∇ e ∇^2 podemos sacar ∇ factor común:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\rho \frac{\partial^2\vec{r}_2}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\nabla^2\vec{r}_2\right) = 0 \quad \text{y por tanto}$$

$$\rho \frac{\partial^2\vec{r}_2}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\nabla^2\vec{r}_2$$

Tomando el rotacional e intercambiando de nuevo se obtiene:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{r}_1}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \vec{r}_1$$

Luego las dos componentes cumplen ecuaciones de ondas luego:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{o1} \exp(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad \text{y } \vec{\nabla} \cdot \vec{r}_1 = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}_{o1} = 0 \ \text{(Onda transversal)}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{o2} \exp(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad \text{y } \vec{\nabla} \times \vec{r}_2 = 0 \Rightarrow \vec{k} \times \vec{r}_{o2} = 0 \ \text{(Onda longitudinal)}$$

Con velocidades de propagación

$$V_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \qquad \text{y} \qquad V_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Condiciones de equilibrio de un sólido isótropo:

Para el tensor de tensiones:

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{o} \quad = -\rho g$$

Para las deformaciones:

$$(\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{R}) + \mu \nabla^2 \vec{R} = 0 \quad \text{o} \quad = -\rho g$$

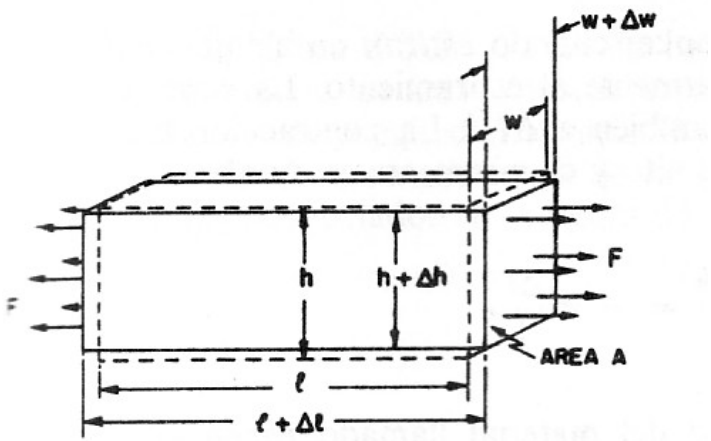
Las otras fuerzas externas vienen a través de las condiciones de frontera.

Energía elástica de un sólido isótropo: la densidad de energía es,

$$U = \frac{1}{2}\lambda\left(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}\right)^2 + \mu\left(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2\right)$$

$$E_{elastica} = \int_{Volumen} U dV$$

Otra forma de definir las constantes elásticas isótropas: Módulos de Young(Y, E) y de Poisson(σ)



$$\frac{F}{A} = Y\frac{\Delta l}{l} \qquad \text{Young}$$

$$\frac{\Delta \mathrm{w}}{\mathrm{w}} = \frac{\Delta h}{h} = -\sigma\frac{\Delta l}{l} \qquad \text{Poisson}$$

La relación con las constantes de Lamé y la compresibilidad es:

$$\lambda = \frac{Y\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)} \;,\quad \mu = \frac{Y}{2(1+\sigma)} \;\text{ y }\; \mathrm{K} = \frac{\mathrm{Y}}{3(1-2\sigma)}$$

Y la ley de Hooke queda:

$$e_{xx} = 1/Y[\sigma_{xx} - \sigma(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \;; \qquad e_{xy} = (1+\sigma)/Y\,\sigma_{xy}$$
$$e_{yy} = 1/Y[\sigma_{yy} - \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \;; \qquad e_{xz} = (1+\sigma)/Y\,\sigma_{xz}$$
$$e_{zz} = 1/Y[\sigma_{zz} - \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \;; \qquad e_{yz} = (1+\sigma)/Y\,\sigma_{yz}$$