PROCESOS ADIABÁTICOS

1. Demostración de que $PV^{\gamma} = cte$
2. Obtención de la expresión del trabajo

1. Por una parte, tendremos en cuenta la ecuación de estado de un gas ideal: $PV = nRT$ (I).

Además, el primer principio de la termodinámica establece que $\Delta U = Q - W$, que en el caso de un proceso adiabático, $Q = 0$ puede expresarse como $dU = -pdV$ (II)

Como $U = nC_vT$ para un gas ideal, (II) puede expresarse como

$$nC_v dT = -p\,dV \quad (III)$$

Si diferenciamos la expresión (I) $\Rightarrow pdV + VdP = nRdT$ con lo que $ndT = \frac{1}{R}(pdV + VdP)$ que sustituyendo en (III)

$$\frac{C_v}{R}(pdV + VdP) = -pdV$$ y agrupando

$$\left(\frac{C_v}{R} + 1\right)pdV = -\frac{C_v}{R}VdP \; ; \; \frac{C_p}{\cancel{R}}pdV = -\frac{C_v}{\cancel{R}}VdP$$

y agrupando ahora, separando P y V tendremos

$$\frac{C_p}{C_v}\frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}$$ esto es $$\gamma\frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}$$. Si integramos

$$\int \gamma \frac{dV}{V} = -\int \frac{dP}{P} \rightarrow \gamma \ln V = -\ln P + cte \rightarrow \gamma \ln V + \ln P = cte$$

Teniendo en cuenta propiedades de logaritmos: $\ln V^{\gamma} + \ln P = cte$

$$\ln(V^{\gamma}P) = cte \Rightarrow \boxed{PV^{\gamma} = \text{constante}}$$

2. Trabajo adiabático

El trabajo asociado a una variación infinitesimal de volumen será $dW = pdV$, con lo que $W(1\to2) = \int_1^2 pdV \; (I)$

En un proceso adiabático $pV^{\gamma} = cte$ (en particular $p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma}$)

Como $p = \frac{cte}{V^{\gamma}}$, lo llevamos a (I)

$$W(1\to2) = \int_1^2 \frac{cte}{V^{\gamma}}\, dV = cte\left[\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]_1^2 = \frac{1}{\gamma-1}\left[\underbrace{p_1V_1^{\gamma}}_{cte} V_1^{-\gamma+1} - \underbrace{p_2V_2^{\gamma}}_{cte} V_2^{-\gamma+1}\right]$$

$$W(1\to2) = \frac{1}{\gamma-1}\left[p_1V_1 - p_2V_2\right]$$

#