VIII - Adición de momentos angulares.

1. Obtener los autovectores de $\mathbf{J}_1^2$, $\mathbf{J}_2^2$, $\mathbf{J}^2$ y J_z como combinación lineal de los autovectores de $\mathbf{J}_1^2$, $\mathbf{J}_2^2$, J_{1z}, J_{2z} con $j_1 = 1$, $j_2 = 1/2$. Obtener los coeficientes de Clebsch-Gordan correspondientes.

2. Consideremos un sistema de dos partículas con spin 1/2 y de las que ignoramos las variables orbitales. El hamiltoniano es $H = \omega_1 S_{1z} + \omega_2 S_{2z}$, siendo ω_1 y ω_2 constantes reales. a) El estado inicial del sistema es $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle$. En un instante t se mide $\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2$. ¿Qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades? b) Si el estado incical es arbitrario ¿Qué frecuencias ("de Bohr") aparecen en la evolución de $\langle \mathbf{S}^2 \rangle$? La misma cuestión para $S_x = S_{1x} + S_{2x}$.

3. Sea $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3$ el spin total de un sistema de tres partículas de spin 1/2. Sean $|\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3\rangle$ los vectores propios comunes a S_{1z}, S_{2z} y S_{3z}, con autovalores respectivos $\epsilon_i \hbar/2$. Hallar una base de autovectores de $\mathbf{S}^2$ y S_z. ¿Forman un CSCO? Sumar primero los spines 1 y 2 y luego añadir el 3º.

4. Las componentes "standard" (o "esféricas") de un operador vectorial $\mathbf{V}$ se definen como: $V_1^1 = -1/\sqrt{2}(V_x + iV_y)$, $V_0^1 = V_z$ y $V_{-1}^1 = 1/\sqrt{2}(V_x - iV_y)$. Usando dichas componentes para dos operadores vectoriales $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ se define el "producto tensorial" de la siguiente forma:

$$[V^1 \otimes V^1]_M^K = \sum_p \sum_q \langle 1, 1; p, q; KM \rangle V_p^1 W_q^1$$

   donde $\langle 1, 1; p, q; KM \rangle$ son los coeficientes de Clebsch-Gordan habituales. a) Mostrar que $[V^1 \otimes V^1]_0^0$ es proporcional al producto escalar $\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}$. b) Mostrar que los tres operadores $[V^1 \otimes V^1]_M^1$ son porporcionales a las tres componentes del operador producto vectorial $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$. c) Expresar las 5 componentes $[V^1 \otimes V^1]_M^2$ en fucnión de V_z, $V_{pm} = V_x \pm iV_y$, W_z y $W_{pm} = W_x \pm iW_y$.

5. Una partícula de spin 1/2 se encuentra en un estado que es vector propio de $\mathbf{J}^2$ y J_z con $J = 3/2$ y $M = -1/2$, siendo $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ el momento angular total. Determinar la probabilidad de que en una medida simultánea salgan los valores $L^2 = 2\hbar^2$, $L_z = 0$, $S_z = \hbar/2$ y $J_z = -\hbar/2$.

6. Obtener los estados $|l, 1/2, J, M\rangle$ como combinación lineal de los $|l, m, 1/2, \epsilon\rangle$ (con $\epsilon = \pm$) para una partícula con momento angular orbital l y spin 1/2.

7. El átomo de deuterio está formado por un núcleo con un protón y un neutrón, y un electrón de spin 1/2. El momento angular nuclear es $\mathbf{I}$ con $I = 1$ y el electrón tiene spin 1/2. El momento angular electrónico es $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ y el total de átomo $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$. Los autovalores de $\mathbf{J}^2$ y de $\mathbf{F}^2$ son respectivamente $J(J+1)\hbar^2$ y $F(F+1)\hbar^2$. a) ¿Cuáles son los psoibles valoresd e los números cuánticaso J y F en el estado fundamental del átomo de deuterio, $1s$ ($n = 1$, $l = 0$)? b) la misma pregunta para el estado excitado $2p$ ($n = 2$, $l = 1$, una nomenclatura común para l usa las letras $s, p, d, f, g, h, ...$ para los valores de $l = 0, 1, 2, 3, ...$).

8. Una partícula (a) de spin $s_a = 1$ y una (b) de $s_b = 2$ se encuentran en una configuración tal que el spin total es $S = 3$ y $M = 1$. ¿Si se mide S_{bz} qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidad?

9. Supongamos que dos partículas 1 y 2 de spin 1/2 se sencuentran en la configuración singlete, es decir con $S = 0$. Sea $S_{1\mathbf{a}}$ el operador que representa la componente del spin de la partícula 1 en la dirección del vector unitario $\mathbf{a}$, y sea $S_{2\mathbf{b}}$ el que representa la componente en la dirección $\mathbf{b}$ de la partícula 2. Mostrar que

$$\langle S_{1\mathbf{a}} S_{2\mathbf{b}} \rangle = -\frac{\hbar^2}{2} \cos\theta$$

   siendo θ el ángulo que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.