VII - Momento angular. Potenciales centrales.

1. Se considera un sistema de momento angular $j = 1$ cuyo espacio de estados es el subtendido por la base ortonormal $|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle$, de autovectores comunes a $\mathbf{J}^2$ y J_z. El estado del sistema es $|\psi\rangle = \alpha|+1\rangle + \beta|0\rangle + \gamma|-1\rangle$, donde α, β y γ son tres números complejos dados. a) Calcular el valor medio $\langle \mathbf{J} \rangle$. b) Dar la expresión de los valores medios $\langle J_x^2 \rangle$, $\langle J_y^2 \rangle$ y $\langle J_z^2 \rangle$.

2. Un sistema está en el estado $|k, j, m\rangle$ con $\mathbf{J}^2$ y J_z definidos. a) Determinar $\langle J_x \rangle$,$\langle J_y \rangle$, $\langle J_x^2 \rangle$, $\langle J_y^2 \rangle$. b) Determinar ΔJ_x,ΔJ_y y verificar que cumplen la relación de incertidumbre. Mostrar que para j dado el máximo valor posible de m es el que corresponde a la igualdad en dicha relación. Sugerencia: Escribir J_x, J_y, J_x^2, J_y^2 en función de J_+ y J_-.

3. Se tiene un sistema físico cuyo espacio de estados (de dimensión 4) tiene por base los kets $|j, m_z\rangle$, autovectores de $\mathbf{J}^2$ y J_z, donde $j = 0, 1$ y $-j \leq m_z \leq j$, y con autovalores $j(j+1)\hbar^2$ y $m_z\hbar$. a) Expresar, en función de los kets $|j, m_z\rangle$ los vectores propios comunes a $\mathbf{J}^2$ y J_x, que escribiremos como $|j, m_x\rangle$.
b) Consideremos el estado normalizado: $|\psi\rangle = \alpha|1,1\rangle + \beta|1,0\rangle + \gamma|1,-1\rangle + \delta|0,0\rangle$ (en la base de $\mathbf{J}^2$ y J_z). i) ¿Cuál es la probabilidad de obtener $2\hbar^2$ y $\hbar$ si se miden "simultáneamente" $\mathbf{J}^2$ y J_z? (primero $\mathbf{J}^2$ y luego J_z, pero no importa el orden para las probabilidades, en todo caso ver CT cap. 3C6a) ii) Calcular el valor medio de J_z en el estado $|\psi\rangle$, así como las probabilidades de los resultados posibles cuando sólo se mide J_z. iii) las mismas preguntas para la medida de $\mathbf{J}^2$ y J_x. iv) Se mide ahora J_z^2. ¿Cuáles son los resultados posibles y sus probabilidades?

4. La función de onda de una partícula sin spin es

$$\psi(x, y, z) = N(x + y + z)e^{-r^2/\alpha^2}$$

donde α es una constante real dada y N una constante de normalización. a) Se miden los observables L_z y $\mathbf{L}^2$. ¿Qué probabiliades hay de encontrar los valores 0 y $2\hbar^2$? Se recuerda que $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$. b) Recordando que $Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}$, ¿se pueden prever directamente todos los resultados posibles de medidas de $\mathbf{L}^2$ y L_z?.

5. Pozo esférico de potencial. Una partícula se mueve por el interior de una cavidad esférica en un potencial $V(r) = 0$ si $r < a$ y $V(r) = \infty$ si $r > a$. Escribir la parte radial de la ecucación de Schrödinger independiente del tiempo (Ec de autovalores del hamiltoniano) para estados con l y m definidos. Encontrar las energías y funciones de onda cuando $l = 0$. Comparar con el resultado clásico.

6. Determinar la densidad de carga y el potencial eléctrico medio creado por el núcleo y el electrón en el estado fundamental del átomo de hidrógeno libre.

7. a) Determinar $\langle r \rangle$ y $\langle r^2 \rangle$ para un electrón en el estado fundamental del átomo de hidrógeno. b) Obtener $\langle x \rangle$ y $\langle x^2 \rangle$. Sugerencia: observar la simetría esférica de la función de onda en ese estado. c) Obtener $\langle x^2 \rangle$ en el estado con $n = 2$, $l = 1$ y $m = 1$.

8. Determinar $\langle P_x \rangle$ y $\langle P_x^2 \rangle$ en el estado fundamental del átomo de hidrógeno. Obtener ΔX y ΔP_x, y verificar la relación de incertidumbre. Aparte de cálculos sofuisticados, ¿por qué el estado fundamental no es con el electrón pegado al protón (predicción clásica), digamos a distancia de 10^{-14} m?

9. Indicamos los autovectores comunes a H, L^2 y L_z del átomo de hidrógeno como $|n, l, m\rangle$.El electrón en un átomo de hidrógeno se encuentra en $t = 0$ en el estado $|\psi\rangle = \alpha|2,1,1\rangle + \beta|3,2,-2\rangle$. Determinar el estado en un instante posterior. Determinar la energía media, $\langle L^2 \rangle$ y $\langle L_z \rangle$ en un instante cualquiera.