VI - Aplicación del formalismo de Dirac

En estos ejercicios utilizar con preferencia el formalismo de Dirac.

1. En un problema unidimensional una partícula está sometida a un potencial $V(x) = -fx$, siendo f una constante (significa la fuerza clásica constante, como la gravedad). a) Escribir el teorema de Ehrenfest para $< X >$ y $< P >$. Integrar las ecuaciones y comparar con el movimiento clásico. b) Mostrar que ΔP no varía con el tiempo. c) Escribir la ecuación de Schrödinger en representación $|p>$. Deducir de ella una relación entre $\frac{\partial}{\partial t}| < p|\psi(t) > |^2$ y $\frac{\partial}{\partial p}| < p|\psi(t) > |^2$. Integrar la ecuación obtenida y darle un significado físico.

2. Sea $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ la densidad de corriente de probabilidad asociada a una función de onda $\psi(\mathbf{r})$, que describe una partícula de masa m.
a) Mostrar que $m \int d^3\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{P} \rangle$
b) Se define el operador vectorial $L = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$, llamado momento angular .ºrbital", que corresponde al momento angular clásico.¿Son hermíticas las componentes de $\mathbf{L}$, L_x, L_y y L_z? Demostrar la relación: $m \int d^3[\mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r})] = \langle \mathbf{L} \rangle$ Notar que es la misma que para el momento magnético de un sistema de corrientes eléctricas, salvo constantes multiplicativas.

3. Queremos demostrar que el estado físico de una partícula sin spin está completamente determinado dando la densidad $\rho(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$ y la densidad de corriente de probabilidad $\mathbf{J}(\mathbf{r})$.
a)Unicidad. Suponer conocida $\psi(\mathbf{r})$ y sea $\xi(\mathbf{r})$ su argumento: $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} \exp^{i\xi(\mathbf{r})}$. Mostrar que $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m}\rho(\mathbf{r})\nabla\xi(\mathbf{r})$. Deducir que dos funciones de onda con las mismas $\rho(\mathbf{r})$ y $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ se diefenecian en un factor de fase global.
b)Existencia. Dadas dos funciones arbitrarias $\rho(\mathbf{r})$ y $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, demostrar que se puede asociar a ellas una función de onda $\psi(\mathbf{r})$ sólo si $\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0$, siendo $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r})/\rho(\mathbf{r})$, es decir la velocidad del "fluido de probabilidad".
c)Suponer ahora que la partícula (carga$q$) está sometida a un campo magnético estático: $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ (recordar la definición de densidad de corriente en este caso). Mostrar que:
$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{m}[\hbar\nabla\xi(\mathbf{r}) - q\mathbf{A}(\mathbf{r}]$ y $\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\frac{q}{m}\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

4. En el instante $t = 0$ una partícula en 1D está situada un pozo cuadrado de potencial de anchura a y profundidad infinita ($V(x) = 0$ si $0 < x < a$, $V(x) \to \infty$ en cualquier otro caso).
a)Si en $t = 0$ está sitiada con toda certeza en el centro del pozo, determinar la función de onda en un instante cualquiera posterior $t > 0$. ¿Cuáles son los resultados posibles de medir la energía y con qué probabilidad?
b)Dar las funciones de onda de dos estados distintos $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ que cumplan las 4 condiciones siguientes: i) Los únicos resultados de medir la energía son los dos primeros niveles E_1 y E_2. ii) $|\psi_1 >$ y $|\psi_2 >$ son ortogonales. iii) las dos funciones de onda son reales. iv) El valor medio de la energía es igual en ambos. Determinar la probabilidad de obtener E_1 y E_2 en cada estado. Calcular $\psi_1(x, t)$, $\psi_2(x, t)$, y $< E(t) >$ en cada estado.

5. Demostrar que para los estados de energía definida del oscilador armónico unidimensional se verifica: (a) $\Delta x \Delta p = (n + 1/2)\hbar$ (determinar explícitamente Δx y Δp), (b) $< T > = < V >$ (Teorema del virial, ya demostrado en la hoja anterior, verificarlo ahora explícitamente).

6. Dada una partícula de spin 1/2, y siendo los estados propios de S_z, $|+\rangle$ y $|-\rangle$, obtener el estado en que está perfectamente determinada la componente del spin en una dirección arbitraria, dada por un vector del espacio ordinario $\mathbf{u}$, o bien unos ángulos polares (θ, φ) en coordenadas esféricas. Notar que $\mathbf{u} = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{u}_x + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{u}_y + \cos\theta\mathbf{u}_z$. El estado indicado es el más parecido posible a uno clásico con $\mathbf{S} \parallel \mathbf{u}$.

7. Consideramos una partícula de spin 1/2 y momento magnético $\mathbf{M} = \gamma \mathbf{S}$. Los kets $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son los autovectores de S_z con autovalores $\pm\hbar/2$. En el instante $t = 0$ esl estado del sistema es $\psi(0) = |+\rangle$. a) ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidades si se mide S_x en $t = 0$? b) No se hace la medida a) sino que se deja evolucionar el sistema en un campo magnético constante B_0 paralelo al eje y. Determinar el estado del sistema en el instante t referido a la base $|+\rangle, |-\rangle$. c) En el instante t se miden los observables S_x, S_y y S_z (en 3 sistemas idéntticamente preparados inicialmente). ¿Que valores se pueden obtener y con que probabilidades?¿En qué instantes de tiempo saldría un resultado seguro en alguna de las tres medidas? Interpretar físicamente. Notar que este método se puede emplear para invertir el spin de una partícula.

8. Se considera un spin 1/2 en el seno de un campo magnético constante cuyas co ponentes son:

$$B_x = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0, \qquad B_y = 0, \qquad B_z = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0$$

Las notaciones son las del ejercicio (7). a) Calcular la matriz que representa el hamiltoniano en la base $|+\rangle, |-\rangle$. b) Calcular los valores y vectores propios de H. c) En el instante $t = 0$ el sistema está en el estado $|-\rangle$, ¿qué energías se pueden obtener y con qué probabilidad? d) Calcular el vector de estado en el instante t. En este instante se mide S_x. ¿Qué valores se pueden obtener y con qué probabilidad?. Dar una interpretación geométrica.

9. Consideremos el sistema formado por 2 spines 1/2, $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$ y la base de 4 vectores $|\pm, \pm\rangle$, En el instante $t = 0$ el sistema está en el estado

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|++\rangle + \frac{1}{2}|+-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-+\rangle$$

El sistema evoluciona bajo el hamiltoniano $H = \omega_1 S_{1z} + \omega_2 S_{2z}$. ¿Cuál es el vector de estado en el instante t? Calcular los valores medios $\langle \mathbf{S}_1 \rangle$ y $\langle \mathbf{S}_2 \rangle$. Interpretación física. Mostrar que las longitudes de los dos vectores son menores que $\hbar/2$. ¿Cómo debería ser $|\psi(0\rangle$ para que fueran las dos $+\hbar/2$?