# V - Formalismo de la Mecánica Cuántica.

1. En un espacio vectorial de dimension 2 se considera el operador cuya matriz en una base ortonormal denominada $\{|1>, |2>\}$ es
$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
a) ¿Es hermítico? Calcular sus valores y vectores propios. Darlos normalizados como componentes en la base $\{|1>, |2>\}$.
b) Determinar las matrices que representan los proyectores sobre estos vectores propios. Comprobar que los vectores propios satisfacen las relaciones de ortonormalización y clausura.
c) Lo mismo para la matriz, en un espacio de dimension 3:
$$L_y = \frac{\hbar}{2i} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2. El espacio de estados de un cierto sistema físico es de dimensión 3. Sea $\{|u_1>, |u_2>, |u_3>\}$ una base ortonormal. Definimos los kets:
$$|\psi_0> = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1> + \frac{i}{\sqrt{2}}|u_2> + \frac{1}{2}|u_3>; |\psi_1> = \frac{1}{\sqrt{(3)}}|u_1> + \frac{i}{\sqrt{(3)}}|u_3>$$
a) ¿Están normalizados? b) Calcular las matrices que representan los proyectores sobre el estado $|\psi_0>$ y sobre el estado $|\psi_1>$. Verificar que son hermíticas.

3. Sea $H$ el operador hamiltoniano en un sistema físico y $\{|\varphi_n>\}$ los vectores propios de $H$ con valores propios $E_n$.
a) Si $A$ es un operador lineal cualquiera demostrar que se cumple: $<\varphi_n|[A, H]|\varphi_n> = 0$.
Se considera el movimiento de una partícula de masa $m$ en 1D bajo el potencical $V(x)$.
b) Calcular en función de $P, X, V(X)$ los conmutadores: $[H, P]$, $[H, X]$ y $[H, XP]$.
c) Mostrar que el elemento de matriz $<\varphi_n|P|\varphi_n> = 0$.
d) Establecer una relación entre $E_c = <\varphi_n|\frac{P^2}{2m}|\varphi_n>$ (energía cinética media)y $<\varphi_n|X\frac{dV}{dX}|\varphi_n>$
Si $V(X) = V_0 X^k$ siendo $k$ entero y par y $V_0 > 0$, ¿qué relación tiene lo anterior con la energía potencial media $<\varphi_n|V(x)|\varphi_n>$?

4. Consideremos un sistema físico cuyo espacio de estados, de dimensión 3, es el subtendido por los tres kets ortonormales $|u_1>$, $|u_2>$ y $|u_3>$. En la base de estos tres kets, tomados en ese orden, los operadores $H$, $A$ y $B$ están definidos por:
$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A = a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
donde $\omega_0$, $a$ y $b$ son constantes reales. a)¿ Son $H$ y $B$ hermíticos? b) Mostrar que $H$ y $B$ conmutan. Dar una base de vectores propios comunes. c) De los siguientes conjuntos,$\{H\}$, $\{B\}$,$\{H, B\}$, $\{H^2, B\}$ ¿Cuáles forman un CSCO?

5. El espacio de estados es el mismo del ejercicio 4. Consideramos ahora los dos operadores definidos por su acción sobre los kets de la base de la siguiente manera:
$L_z|u_1> = |u_1>$; $\quad L_z|u_2> = 0$; $\quad L_z|u_3> = -|u_3>$

$S|u_1>=|u_3>; \quad S|u_2>=|u_2>; \quad S|u_3>=|u_1>$
a) Escribir las matrices que representan en la base $\{|u_1>, |u_2>, |u_3>\}$ los operadores $L_z$, $L_z^2$, $S$ y $S^2$. Estos operadores, ¿son observables? b) Dar la forma más general de una matriz que conmute con $L_z$. La misma pregunta para $L_z^2$ y para $S^2$. c) ¿$L_z$ y $S$ forman un CSCO? Encontrar una base de vectores propios comunes.

6. Consideremos un sistema físico cuyo espacio de estados es el del ejercicio 4 y donde $H$ es el operador hamiltoniano. En $t = 0$ el sistema se encuentra en el estado $|\psi(0)>= \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1> + \frac{1}{2}|u_2> + \frac{1}{2}|u_3>$.
a) En $t = 0$ se mide la energía. ¿Qué valores se encontrarán y con qué probabilidades? Calcular $<H>$ y $\Delta H$ para el estado $|\psi(0)>$. b) En lugar de medir $H$, se mide $A$. ¿Que posibles valores se pueden obtener y con qué probabilidades?¿Cuál es el estado del sistema inmediatamente después de la medida? c) Calcular $|\psi(t)>$ d) calcular $<A(t)>$ y $<B(t)>$. Comentar los resultados. e) ¿Qué resultados podrían obtenerse si midiéramos $A$ en el instante $t$. ¿Cuáles si midiéramos $B$? Comentar.

7. Las funciones de onda de energía definida para una partícula 1D en un pozo cuadrado de potencial infinitamente profundo ($V(x) = 0$ si $0 < x < a$, $V \to \infty$ en cualquier otro caso) son $\phi_n(x) = \sqrt{2/a}\sin(n\pi x/a)$.
a) Mostrar que son ortonormales. b) Mostrar que forman una base del (sub) espacio de las funciones de cuadrado integrable que se anulan fuera del intervalo $(0, a)$. c) La función de onda de una partícula (corresponde a una partícula localizada cerca del centro del pozo) es la función rectangular $\phi(x) = 1/\sqrt{\epsilon}$ si $a/2 - \epsilon/2 < x < a/2 + \epsilon/2$, y $\phi(x) = 0$ en otro caso. Determinar de forma cerrada los coeficientes $c_n$ que expresan $\phi$ como combinación lineal de las funciones de base (es decir, dar $c_n$ en función de $n$). d) Mostrar explícitamente mediante un programa de ordenador que:
$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 1,$$
lo que debe ocurrir necesariamente porque la suma es $||\phi||^2$, que es la unidad obviamente, como se puede ver por integración de $|\phi(x)|^2$. Los resultados de este problema se usarán en el nº 4 de la hoja siguiente.