IV - Oscilador Armónico.

1. La función de onda de un oscilador armónico cuántico de masa m y frecuencia angular ω está dada por:
$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$
siendo $\phi_n(x)$ la función de onda del estado estacionario n, de energía $E_n = \hbar\omega(1/2 + n)$. a) ¿Cuál es el valor medio de la energía en función de los coeficientes c_n? Admitiendo que en una medida de la energía se debe obtener precisamente uno de los valores anteriores, ¿cuál es la probabilidad de obtener el valor E_n

   b)¿Cuál es la probabilidad P de que en una medida de la energía en un instante posterior $t > 0$ se obtenga un valor mayor que $2\hbar\omega$? Cuando $P = 0$, ¿qué coeficientes c_n son distintos de cero?

2. Partiendo de los supuestos del problema anterior, supongamos que sólo son distintos de cero c_0 y c_1. Escribir la condición de normalización y el valor medio de la energía $< E >$ en función de c_0 y c_1. Ahora imponemos además que $< E >= \hbar\omega$. Determinar $|c_0|^2$ y $|c_1|^2$.

   b) Fijamos que c_0 sea real y positivo. Determinar el argumento de c_1, θ_1 ($c_1 = |c_1|e^{i\theta_1}$) si además de que $< E >= \hbar\omega$, se cumple también que $< x >= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

   c) Escribir $\Psi(t)$ y calcular θ_1 para todo $t > 0$. Deducir de ahí $< x > (t)$.

3. Determinar $< x >$, $< p >$, $< x^2 >$, y $< p^2 >$ en los estados ϕ_0 y ϕ_1 del oscilador armónico. Comprobar que se cumple la relación de incertidumbre.

4. En el estado fundamental del oscilador armónico ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la partícula en la zona prohibida clásicamente, es decir donde $V(x) > E$?.

5. Oscilador armónico isótropo en 3D. Una partícula se mueve en el espacio sometida a un potencial $V(x) = (1/2)m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)$. Encontrar las funciones de onda y las energías de los estados estacionarios. Sugerencia: probar funciones de onda de la forma $\phi(x, y, z) = \phi_1(x)\phi_2(y)\phi_3(z)$.

6. Un oscilador armónico bidimensional isótropo de frecuencia angular ω se encuentra en un estado de energía $2\hbar\omega$. Se sabe que el valor esperado de x^2 es $5\hbar/6m\omega$. Calcular el valor esperado de y^2 y el de la energía potencial.