II - Hipótesis Ondulatoria de de Broglie.

1. A partir de la ley de la radiación de Planck obtener la expresión para bajas frecuencias. Comprobar que coincide con la ley de Rayleigh-Jeans. Obtener la longitud de onda a la que la densidad espectral es máxima.

2. Obtener las siguientes relaciones entre (1) la energía cinética K del electrón de retroceso y la energía E del fotón incidente en el efecto Compton y (2) entre la dirección de movimiento del fotón dispersado θ y del electrón de retroceso ϕ. $A \equiv h\nu/(m_0c^2)$.

$$\frac{K}{E} = \frac{2A\sin^2\frac{\theta}{2}}{1 + 2A\sin^2\frac{\theta}{2}} \quad (1) \qquad \cot\frac{\theta}{2} = (1 + A)\tan\phi \quad (2)$$

3. Demostrar que (a) un electrón libre no puede radiar un fotón, (b) un fotón no puede transferir toda su energía a un electrón libre y (c) que un fotón no puede crear un par e+e- en el vacío.

4. Un átomo muónico está formado por un núcleo con carga Ze y un muón (la masa de muón es 207 veces superior a la del electrón). Calcular: (a) El radio de la primera órbita de Bohr, (b) su energía de ligadura (tomar Z=1) y (c) la longitud de onda de la primera línea de la serie de Lyman.

5. Asumiendo que la energía media de una partícula de un gas ideal monoatómico es $(3/2)k_BT$ (véase Termodinámica), determinar la longitud de onda de de Broglie para una partícula de masa m cuya energía sea la media. Determinar la velocidad y la longitud de onda mayoritaria de un gas de neutrones (llamados "termicos") a 300 K. Explicar por qué se usa la difracción de neutrones térmicos para el estudio de sólidos. Los efectos cuánticos macroscópicos en el gas se notan cuando la longitud de onda de de Broglie es del orden de o mayor que la distancia interatómica media. Determinar la temperatura a la que esto ocurre para un gas ideal de neutrones a P = 1 atm y para el helio que es líquido por debajo de 4.2 K con una densidad $\rho = 0.125$ g/cm^3.

6. Demostrar que la longitud de onda de de Broglie para una partícula de carga q, masa en reposo m_0 y que se mueve a velocidades relativistas alcanzadas mediante un potencial eléctrico acelerador V es:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0qV}}(1 + \frac{qV}{2m_oc^2})^{-1/2}$$

Ver que esta expresión está de acuerdo con $\lambda = h/mv$ en el límite no relativista. Sugerencia: recordar que en Relatividad la energía es $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$ y que la energía cinética es $E_c = E - m_0c^2 = qV$.

7. El estado de una partícula en $t = 0$ está representado por una superposición de dos ondas monocromáticas: $\Psi(x, t = 0) = A_1 \exp^{ik_1x} + A_2 \exp^{ik_2x}$. Determinar la energía y el momento medios y la indeterminación en la energía y el momento. Determinar la función de onda en un instante posterior t aceptando la hipótesis de de Broglie.

8. La función de onda de una partícula es un tren de ondas de longitud finita Δx, es decir que en $t = 0$ es $\Psi(x, t = 0) = Ae^{(ik_0x)}$ si $-\Delta x/2 < x < \Delta x/2$ y $\Psi(x, t = 0) = 0$ para cualquier otro valor de x, siendo $A > 0$ una constante real. Determinar el valor de A. Escribirla como superposición de ondas monocromáticas (transformada de Fourier), es decir encontrar $g(k)$ tal que

$$\Psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{ikx}dk$$

Sugerencia: Tomar un valor k_1 fijo, multiplicar Ψ por e^{-ik_1x} e integrar en x de $-\infty$ a $+\infty$. Determinar la energía y el momento esperados de la partícula. Estimar (hacer una definición intuitiva para ese paquete) la indeterminación en la energía y el momento. Determinar la función de onda en un instante posterior t. ¿Como cambian los resultados si A es otro valor, negativo, complejo o con otro módulo?

9. Paquete gaussiano. Un "paquete"de ondas, que representa el estado de una partícula libre de masa m en $t = 0$, está definido por

$$\Psi(x, t = 0) = A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\left(\frac{k - k_0}{\Delta k}\right)^2] \exp(ikx) dk$$

siendo Δk un valor constante. ¿Qué representan físicamente el valor Δk y esa función de onda de la partícula? Obtener explícitamente $\psi(x, 0)$. ¿Cuanto debe valer A si la probabilidad de encontrar la partícula en algún sitio debe ser la unidad. ¿Cuál es la anchura espacial del paquete? (definimos $\Delta x =$ el espacio en que la amplitud de la onda es por lo menos $1/e$ de la máxima). ¿Qué relación hay entre Δk y Δx? Obtener el valor "esperado" de la posición de la partícula y de su momento. Obtener el valor esperado de su energía. Obtener $\Psi(x, t)$ en cualquier otro instante posterior si se cumple la ecuación diferencial

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

10. Mostrar que si una función $\Psi(x, t)$ obedece a la ecuación

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = iC \frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{1}$$

con $C = const > 0$ real, entonces la solución más general posible de cuadrado integrable es $\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{[i(kx - k^2 t/C)]}$. Es decir, una superposición de "ondas planas" de todos los números de ondas posibles y frecuencias $\omega(k) = k^2/C$. Sugerencia: buscar la solución por separación de variables, o sea, soluciones de la forma $\phi(x)f(t)$. Obtener la velocidad de grupo y de fase y mostrar que $v_g = 2v_p$. Esta es la implicación inversa a la estudiada en la teoría y prueba que la ecuación diferencial anterior se cumple si y sólo si $v_g = 2v_p$.

11. Una partícula se mueve en una región donde la energía potencial es $V_0 = cte$. Si su momento lineal es p determinar su velocidad de fase y de grupo aceptando las relaciones de de Broglie: $E = h\nu, p = h/\lambda$. Notar que para una misma energía cinética la velocidad de fase es muy diferente de la partícula libre (con $V_0 = 0$).

12. Una partícula en 1D de energía E se mueve libremente y entra en una región donde la energía potencial es V_0, con $0 < V_0 < E$. Determinar el momento inicial p_1 y final p_2, éste después de entrar en la región, mediante las leyes de la Mecánica Clásica. Aceptando las relaciones de de Broglie obtener las velocidades de grupo y de fase antes y después. Mostrar que

$$v_{p2} = v_{p1} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha}} > v_{p1}; \quad v_{g2} = v_{g1}\sqrt{1 - \alpha} < v_{g1}; \quad v_{p1}v_{g1} = v_{p2}v_{g2}$$

siendo $\alpha = 2mV_0/p_1^2 < 1$.

13. En un medio se puede propagar un cierto tipo de "ondas" de modo que para ondas armónicas se cumple que $\omega^2 = C|k|$, siendo $C > 0$ una constante. Determinar la velocidad de fase y de grupo. Demostrar que una onda armónica necesariamente cumple la ecuación diferencial

$$iC \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Sugerencia: Poner $\psi = A \exp[i(kx - \omega t)]$ y calcular las dos primeras derivadas parciales.
Mostrar que si se cumple la ecuación diferencial anterior la solución más general posible es una superposición de ondas armónicas que cumplen la relación de dispersión indicada arriba, es decir la ecuación diferencial se cumpe si y sólo si la relación etre ω y k es la dada arriba. Sugerencia: Buscar la solución por separación de variables, es decir $\Psi(x, t) = \phi(x)f(t)$. La solución más general es una combinación lineal de las que se obtienen así.