**Solución del Examen de Física Cuántica I. 3º de Grado en Física.**
**7 de septiembre de 2015. Evaluación continua y global sobre 7 puntos**

1. 1)a)Se trata de escribir la función que se da, $\phi(x)$, como combinación lineal de las de la base. Por simple inspección es obvio que sólo pueden aparecer $\phi_0$ y $\phi_2$: $\phi(x) = c_0\phi_0(x) + c_2\phi_2(x)$
   Es decir, sustituyendo:
   $Ax^2 = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4}[c_0 + c_2\frac{1}{\sqrt{8}}(4\beta^2x^2 - 2)]$, lo cual solo es posible $\forall x$, si:
   $A = c_2\left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4}\frac{4}{\sqrt{8}}\beta^2$, y también: $c_0 - 2c_2/\sqrt{8} = 0 \Rightarrow c_2 = \sqrt{2}c_0$
   Sabiendo que las $\phi_n(x)$ están normalizadas, para que lo esté $\phi(x)$ debe ser necesariamente:
   $|c_0|^2 + |c_2|^2 = 1 \Rightarrow |c_0|^2(1+2) = 1 \Rightarrow |c_0| = \sqrt{3} \Rightarrow |c_2| = \sqrt{2/3}$
   Si se quiere que $A \geq 0$, sea real, debe ser:
   $$c_0 = 1/\sqrt{3}; c_2 = \sqrt{2/3}; A = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4}\frac{4}{\sqrt{8}}\beta^2 = \frac{2}{3^{1/2}\pi^{1/4}}\beta^{5/2}$$
   Nota: El valor de $A$ se puede obtener también calculando la norma de $\phi$ por integración, lo que da el mismo resultado, y prueba que efectivamente las funciones de la base están normalizadas:
   $$1 = ||\phi||^2 = \int_{-\infty}^{\infty}|A|^2x^4\exp(-\beta^2x^2)dx = |A|^2\frac{3\sqrt{\pi}}{4\beta^5} \Rightarrow |A|$$
   b) Se tiene: $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_0(x) + \frac{2}{\sqrt{3}}\phi_2(x)$, luego las energías posibles son $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ y $E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega$.
   Las probabilidades de obtener esos valores (postulado 4) son:
   $P(E_0) = |<\phi_0|\phi>|^2 = |c_0|^2 = 1/3;$
   $P(E_2) = |<\phi_2|\phi>|^2 = |c_2|^2 = 2/3$
   c)La función de onda en cualquier isntante posterior, $t > 0$, es:
   $\phi(x,t) = c_0\exp(-\frac{iE_0t}{\hbar})\phi_0(x) + c_2\exp(-\frac{iE_2t}{\hbar})\phi_2(x) = \exp(-i\omega t/2)[c_0\phi_0 + \exp(-i2\omega t)c_2\phi_2]$
   El primer factor es un factor de fase global, irrelevante para calcular valores medios. El valor medio o esperado de $V$ se calcula fácilmente usando:
   $$<\phi|V|\phi> = \frac{1}{2}m\omega^2 <\phi|X^2|\phi> = \frac{1}{2}m\omega^2||X|\phi\rangle||^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\frac{\hbar}{2m\omega}||\frac{1}{\sqrt{2}}(a^+ + a)|\phi\rangle||^2 = \frac{1}{4}\hbar\omega||(a^+ + a)|\phi\rangle||^2$$
   Por otra parte $|\phi\rangle = c_0|\phi_0\rangle + c_2\exp(-i2\omega t)|\phi_2\rangle$, y las propiedades generales de los operadores escalera son $a^+|\phi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\phi_{n+1}\rangle$, $a|\phi_n\rangle = \sqrt{n}|\phi_{n-1}\rangle$ por tanto:
   $(a^+ + a)|\phi\rangle = [c_0 + \sqrt{2}c_2\exp(-i2\omega t)]|\phi_1\rangle + \sqrt{3}c_2\exp(-i2\omega t)|\phi_3\rangle$
   Y su norma cuadrada, teniendo en cuenta que $c_0$ y $c_2$ son reales, vale: $|c_0 + \sqrt{2}c_2\exp(-i2\omega t)|^2 + 3c_2^2$
   El modulo cuadrado del primer complejo es simplemente el producto por su conjugado y queda:
   $||(a^+ + a)|\phi(t)\rangle||^2 = c_0^2 + 5c_2^2 + 2\sqrt{2}c_0c_2\cos(2\omega t)$, y $\langle\phi|V|\phi\rangle = \frac{1}{4}\hbar\omega[c_0^2 + 5c_2^2 + 2\sqrt{2}c_0c_2\cos(2\omega t)]$
   Sustituyendo los datos, $\cos(2\omega t) = -1$, $c_0 = 1/\sqrt{3}$ y $c_2 = \sqrt{2/3}$ queda:
   $$\langle V\rangle = \langle\phi|V|\phi\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}(1/3 + 5\times 2/3 - 4/3) = \frac{7}{12}\hbar\omega$$
   Comentario: Salvo en uno de los estados $|\phi_n\rangle$, que no es el caso, debido al término multiplicado por $\cos(2\omega t)$, la energía potencial media no es constante sino que oscila con el tiempo entre el valor inicial (máximo), que se obtiene poniendo $t = 0, \cos(2\omega t) = 1$ y el mínimo, que se obtiene cuando $\cos(2\omega t) = -1$. Esto se comprende porque la función de onda inicial se anula en $x = 0$ y da mayor energía potencial media que la correspondiente a $t = \pi/2\omega$ que no se anula en $x = 0$.

2. a) Dado que el momento angular, sea cual sea, se relaciona con su número cuántico mediante $S = j(j+1)\hbar^2$, $j_1 = 1/2$ y $j_2 = 1$. Y dado que $-j \leq m \leq j$, $m_1 = -1/2, +1/2$, $m_2 = -1, 0, 1$.
b)Si $J$ es el número cuántico que corresponde al spin total $S^2$ las propiedades generales de los momentos angulares exigen $|j_2 - j_1| \leq J \leq j_1 + j_2$ luego $J = 1/2, 3/2$. El máximo posible es $3/2$. Para este valor de $J$ el número cuántico que corresponde a $S_z$, llamémoslo $M$, debe cumplir $-J \leq M \leq J$, luego el máximo es $3/2$. Dado que también $M = m_1 + m_2$ este valor sólo se puede conseguir con la combinación $m_1 = +1/2$ y $m_2 = +1$ luego el autovector de $S^2$ y $S_z$ que corresponde a los máximos $J$ y $M$ es la única combinación posible que se obtiene con $m_1 = 1/2$ y $m_2 = 3/2$ (salvo por un factor de fase global arbitrario):
$|3/2, 3/2\rangle = |1/2, 1/2; 1, 1\rangle$
c) $[H, S_{1z}] = A[S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z}, S_{1z}]$
Como cualquier operador que actúe sobre los estados de la partícula 1 conmuta con cualquier otro de la partícula 2, y obviamente $S_{1z}$ consigo mismo queda:
$[H, S_{1z}] = A([S_{1x}, S_{1z}]S_{2x} + [S_{1y}, S_{1z}]S_{2y}$.
Usando las reglas de conmutación generales de los momentos angulares: $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$ y permutaciones cíclicas, nos queda:

$[H, S_{1z}] = i\hbar A(-S_{1y}S_{2x} + S_{1x}S_{2y}) \neq 0$

d) $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \Rightarrow \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2)$
por tanto $H$ conmuta con $S^2$, $S_1^2$, $S_2^2$ y $S_z$. Además no depende de $S_z$ luego los vectores propios de $H$ son los de $S_2$ y los valores propios $\frac{A\hbar^2}{2}[J(J+1) - j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)]$

Es decir, para $J = 3/2$, y cualquier valor de $M$:
$E(J = 3/2) = \frac{A\hbar^2}{2}(15/4 - 3/4 - 2) = \frac{A\hbar^2}{2}$
Los estados que corresponden a esa energía son los estados propios del spin total $S^2$, $|3/2, M\rangle$, con $M = 3/2, 1/2, -1/2, 3/2$
Para $J = 1/2$, $E(J = 1/2) = \frac{A\hbar^2}{2}(3/4 - 3/4 - 2) = -A\hbar^2$
Y los estados que corresponden a esa energía son: $|1/2, 1/2\rangle$ y $|1/2, -1/2\rangle$