

**Solución del Examen de Física Cuántica I. 3º de Grado en Física.
27 de enero de 2017. Evaluación continua y global sobre 7 puntos**

1. a) Si una función $\psi(x, y)$ es de energía definida verifica la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(x, y)\psi = E\psi$$

para alguna constante E en cuyo caso es la energía. En el problema planteado $\psi(x, y) = \phi_{n1}(x)\phi_{n2}(y)$ donde las dos funciones de x y de y verifican por separado la ecuación de Schrödinger 1D. Veamos si el producto cumple la 2D. Sustituyendo arriba:

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2m}\phi_{n1}''(x)\phi_{n2}(y) - \frac{\hbar^2}{2m}\phi_{n1}(x)\phi_{n2}''(y) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)\phi_{n1}(x)\phi_{n2}(y) = \\ &[-\frac{\hbar^2}{2m}\phi_{n1}''(x) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\phi_{n1}(x)]\phi_{n2}(y) + [-\frac{\hbar^2}{2m}\phi_{n2}''(y) + \frac{1}{2}m\omega^2y^2\phi_{n2}(y)]\phi_{n1}(x) \end{aligned}$$

Los corchetes son las ecs. de Schrödinger unidimensionales y valen respectivamente $\hbar\omega(n1 + 1/2)\phi_{n1}(x)$ y $\hbar\omega(n2 + 1/2)\phi_{n2}(y)$, luego queda:

$$[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x, y)]\phi_{n1}(x)\phi_{n2}(y) =$$

$$\hbar\omega(n1 + 1/2)\phi_{n1}(x)\phi_{n2}(y) + \hbar\omega(n2 + 1/2)\phi_{n2}(y)\phi_{n1}(x) = \hbar\omega(n1 + n2 + 1)\phi_{n1}(x)\phi_{n2}(y)$$

Es decir la función de onda $\phi_{n1}(x)\phi_{n2}(y)$ es de energía definida

$$E_{n1, n2} = \hbar\omega(n1 + n2 + 1)$$

- b) Se tiene $L_z = XP_y - YP_x$. Como se ha visto en la teoría, L_z conmuta con el hamiltoniano si el potencial depende solamente de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ya que en polares $L_z = -i\hbar\partial/\partial\theta$ y no actúa más que sobre el ángulo, que es el caso presente. Por lo tanto sí conmuta. De todas formas es inmediato verificar directamente que con el hamiltoniano dado $[H, L_z] = 0$, sustituyendo directamente los operadores X, P_x, Y y P_y .

Usando la definición de los operadores escalera se tiene, $X = (1/\beta)(a_x^+ + a_x)/\sqrt{2}$, $P_x = i\beta\hbar(a_x^+ - a_x)/\sqrt{2}$, $Y = (1/\beta)(a_y^+ + a_y)/\sqrt{2}$ y $P_y = i\beta\hbar(a_y^+ - a_y)/\sqrt{2}$.

Sustituyendo en la definición de L_z queda:

$L_z = (i\hbar/2)[(a_x^+ + a_x)(a_y^+ - a_y) - (a_y^+ + a_y)(a_x^+ - a_x)]$. Para desarrollar hay que tener presente que los únicos operadores que no conmutan son X con P_x e Y con P_y , o sea a_x con a_x^+ y a_y con a_y^+ .

Desarrollando queda:

$L_z = (i\hbar/2)[a_x^+a_y^+ - a_x^+a_y + a_xa_y^+ - a_xa_y - a_y^+a_x^+ + a_y^+a_x - a_ya_x^+ + a_ya_x]$, que se simplifica quedando finalmente:

$$L_z = i\hbar[a_xa_y^+ - a_x^+a_y]$$

- c) Recordando la actuación de los operadores escalera: $a^+|\phi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\phi_{n+1}\rangle$, $a|\phi_n\rangle = \sqrt{n}|\phi_{n-1}\rangle$, tenemos:

$$L_z|\phi_{n1}\phi_{n2}\rangle = i\hbar[\sqrt{n1(n2+1)}|\phi_{n1-1}\phi_{n2+1}\rangle - \sqrt{(n1+1)n2}|\phi_{n1+1}\phi_{n2-1}\rangle].$$

Tomando los tres vectores $|u_1\rangle = |\phi_{0x}\phi_{2y}\rangle$, $|u_2\rangle = |\phi_{1x}\phi_{1y}\rangle$ y $|u_3\rangle = |\phi_{2x}\phi_{0y}\rangle$ tenemos:

$$L_z|u_1\rangle = L_z|\phi_{0x}\phi_{2y}\rangle = -i\hbar\sqrt{2}|\phi_{1x}\phi_{1y}\rangle = -i\sqrt{2}\hbar|u_2\rangle$$

$$L_z|u_2\rangle = i\hbar[\sqrt{2}|\phi_{0x}\phi_{2y}\rangle - \sqrt{2}|\phi_{2x}\phi_{0y}\rangle] = i\sqrt{2}\hbar(|u_1\rangle - |u_3\rangle)$$

y $L_z|u_3\rangle = L_z|\phi_{2x}\phi_{0y}\rangle = -i\sqrt{2}\hbar|u_2\rangle$, y haciendo los productos escalares por cada $|u_i\rangle$ se obtienen la

matriz que representa L_z en esta base, y que es:

$$L_z = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

d) Los autovalores de la matriz, sin el prefactor $\sqrt{2}\hbar$, se obtienen como las raíces del polinomio característico, que resulta ser:

$$-\lambda^3 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \pm\sqrt{2}$$

Los valores de L_z que pueden salir en una medida son sus autovalores, es decir $L_z = \sqrt{2}\hbar\lambda = 0, \pm 2\hbar$. Para determinar las probabilidades debemos hallar los autovectores $|v_\lambda\rangle$, buscando para cada λ las soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones $L_z|v_\lambda\rangle = \lambda|v_\lambda\rangle$, que escrito en componentes en la base dada es:

$$-\lambda x_1 - ix_2 = 0; ix_1 - \lambda x_2 - ix_3 = 0; ix_2 - \lambda x_3 = 0 \quad (1)$$

que son, por ejemplo (basta una solución para cada λ), ya ortonormalizados:

$$|L_z = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_3\rangle), |L_z = 2\hbar\rangle = \frac{1}{2}(|u_1\rangle + i\sqrt{2}|u_2\rangle - |u_3\rangle), |L_z = -2\hbar\rangle = \frac{1}{2}(|u_1\rangle - i\sqrt{2}|u_2\rangle - |u_3\rangle).$$

Según el 4º postulado de la Mecánica Cuántica la probabilidad de obtener cada autovalor es el producto escalar al cuadrado del vector de estado dado $|\phi_{0x}\phi_{2y}\rangle = |u_1\rangle$ por el autovector correspondiente a dicho autovalor:

$$P(L_z = 0) = 1/2, P(L_z = 2\hbar) = 1/4, P(L_z = -2\hbar) = 1/4.$$

Sólo hay que considerar los tres vectores indicados en el apartado c) porque no hay más vectores linealmente independientes que sean autovectores del hamiltoniano con esa misma energía, $3\hbar\omega$. Así pues forman una base (ortonormal además) del subespacio propio $\mathbf{E}_{3\hbar\omega}$ que corresponde a dicho autovalor de H . L_z conmuta con H y entonces, por un importante teorema del álgebra, la actuación de L_z sobre un vector cualquiera de $\mathbf{E}_{3\hbar\omega}$ da otro vector del mismo subespacio. Dado además que L_z es hermítico existe al menos una base de $\mathbf{E}_{3\hbar\omega}$ formada por autovectores de L_z dentro del mismo. Por tanto el estado dado $|\phi_{0x}\phi_{2y}\rangle$ y cualquier otro de dicho subespacio se puede escribir como combinación lineal de dichos autovectores solamente, sin que puedan intervenir autovectores de fuera del subespacio. Los autovalores de L_z correspondientes son los únicos que pueden salir en una medida. No se pedía pero en realidad es fácil demostrar que los autovectores de L_z son únicos dentro de cada subespacio propio de H , $\mathbf{E}_{(n_1+n_2+1)\hbar\omega}$, es decir que H y L_z forman un CSCO.

2. a) Usemos la base de autovectores de S_1^2, S_{1z}, S_2^2 y S_{2z} , que se escribe normalmente mediante los números cuánticos correspondientes $|S_1, m_1, S_2, m_2\rangle$, pero vamos a suprimir S_1 y S_2 ya que en este problema son siempre la unidad, es decir $|m_1, m_2\rangle$. Actuando con el hamiltoniano dado sobre cada uno de los vectores de la base, y usando la propiedad fundamental de los operadores S_{1z} y S_{2z} se tiene para cada vector:

$$H|m_1, m_2\rangle = \hbar(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)|m_1, m_2\rangle,$$

es decir, que todos los vectores de esa base son ya autovectores de H , y además con autovalores distintos, por tanto son los autovectores “únicos” (únicos salvo por una constante multiplicativa distinta de cero) y físicamente los únicos estados de energía definida. Las energías propias son pues los autovalores correspondientes, $E_{m_1, m_2} = \hbar(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$, que salen con las 9 combinaciones de valores de $m_1, m_2 = 0, \pm 1$.

b) El estado dado es $|\psi\rangle = |JM\rangle$, con $J = 1, M = 1$, que no es de energía definida. Para obtener su evolución temporal la “receta usual (que es básico conocer) es escribir $|\psi\rangle$ como combinación lineal de la base de autovectores de H . para ello debemos buscar los coeficientes en las tablas de Clebsch-Gordan (deducirlos es mucho más largo) de 1×1 , donde sale que:

$$|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle),$$

y donde a la izquierda del signo = va $|JM\rangle = |11\rangle$ y a la derecha van los únicos dos vectores $|m_1, m_2\rangle$ que pueden salir con $S_1 = 1, S_2 = 1$ y $M = 1$ que son, con $m_1 = 1, m_2 = 0$ y $m_1 = 0, m_2 = 1$ ya que debe ser $m_1 + m_2 = M$ y $|m_1| \leq 1, |m_2| \leq 1$.

Por tanto, recordando que la energía propia de $|m_1 m_2\rangle|10\rangle$ es $\hbar\omega_1$ y la de $|m_1 m_2\rangle|01\rangle$ es $\hbar\omega_2$, tenemos: $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-i\omega_1 t)|10\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-i\omega_2 t)|01\rangle$.

c) Para ver los valores de J^2 que pueden salir en una medida hay que escribir el vector de estado como combinación lineal de autovectores de J^2 . En la misma tabla de Clebsch-Gordan 1x1 se obtiene que:

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|21\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

$$|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|21\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle,$$

donde ahora a la izquierda están $|m_1 m_2\rangle$ y a la derecha $|JM\rangle$. Sustituyendo queda:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-i\omega_1 t) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|21\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-i\omega_2 t) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|21\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \right).$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} [\exp(-i\omega_1 t) - \exp(-i\omega_2 t)] |21\rangle + \frac{1}{2} [\exp(-i\omega_1 t) + \exp(-i\omega_2 t)] |11\rangle.$$

Los valores de J^2 que pueden salir en una medida son $J(J+1)\hbar^2$ es decir $2\hbar^2$ para $J=1$ y $6\hbar^2$ para $J=2$.

las probabilidades son los módulos al cuadrado de los coeficientes:

$$P(J=2) = \frac{1}{4} [\exp(-i\omega_1 t) - \exp(-i\omega_2 t)] [\exp(+i\omega_1 t) - \exp(+i\omega_2 t)] = \frac{1}{4} (1 + 1 - \exp[i(\omega_2 - \omega_1)t] - \exp[i(\omega_2 - \omega_1)t]) = \frac{1}{2} [1 - \cos(\omega_2 - \omega_1)t]$$

$$P(J=1) = \frac{1}{4} [\exp(-i\omega_1 t) + \exp(-i\omega_2 t)] [\exp(+i\omega_1 t) + \exp(+i\omega_2 t)] = \frac{1}{4} (1 + 1 + \exp[i(\omega_2 + \omega_1)t] - \exp[i(\omega_2 + \omega_1)t]) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t]$$

Se obtendrá el resultado seguro $J=1$ cuando $\cos(\omega_2 - \omega_1)t = 1$, en que $P(J=2) = 0$ o sea en los instantes $t = 2n\pi/(\omega_1 - \omega_2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Y se obtendrá el resultado seguro $J=2$ cuando $\cos(\omega_2 - \omega_1)t = -1$, o sea $t = (2n+1)\pi/(\omega_2 - \omega_1)$. Físicamente se entiende pues como J^2 no conmuta con H el sistema oscila entre los dos estados $|11\rangle$ y $|21\rangle$ con frecuencia $\omega_2 - \omega_1$.

Si por casualidad fuera $\omega_2 = \omega_1$ el hamiltoniano sería $H = \omega_1(S_{1z} + S_{2z}) = \text{cte} J_z$ y conmutaría con J^2 pues J_z sí que conmuta. En ese caso el estado inicial sería necesariamente autovector de H (combinación de dos vectores de la base inicial $|m_1 m_2\rangle$, ahora con la misma energía) y no evolucionaría, lo que en las fórmulas obtenidas se traduce en que si $\omega_2 = \omega_1$, $\cos(\omega_2 - \omega_1)t = 1$ siempre.