Solución del Examen de Física Cuántica I. 3º de Grado en Física.
26 de enero de 2015. Evaluación continua y global sobre 7 puntos

1. Se dan las funciones propias del hamiltoniano: $\phi_n(x) = \sqrt{2/a}\sin(n\pi x/a)$, luego tenemos que $\psi = A\sqrt{a/2}(\phi_1 + 2\phi_2)$
   a) Normalización. Teniendo en cuenta que ϕ_1 y ϕ_2 son ortogonales por ser autovectores de H con autovalor distinto:
   $$1 = ||\psi||^2 = \langle\psi|\psi\rangle^2 = |A|^2\frac{a}{2}(||\phi_1||^2 + 4||\phi_2||^2) = |A|^2\frac{a}{2}(1+4) = |A|^2\frac{5a}{2}$$
   Por tanto, si $\psi(x)$ es real $A = \pm\sqrt{2a/5}$.
   Además en $x = 3a/4, \psi(3\pi/4) = A(\sin(3\pi/4) + 2\sin(6\pi/4)) = A(1/\sqrt{2} - 2) > 0 \Rightarrow A < 0$
   Por tanto $A = -\sqrt{2/5a}$, y $\psi = (1/\sqrt{5})(\phi_1 + 2\phi_2)$.

   b) $\langle E\rangle = \langle\psi|E|\psi\rangle = E_1\cdot(1/5)||\phi_1||^2 + E_2\cdot(4/5)||\phi_1||^2 = E_1/5 + 4E_2/5 = E_1/5 + 4\cdot 4E_1/5 = 17E_1/5$
   Los estados ϕ_n deben cumplir la ec. de Schrödinger independiente del tiempo, luego:
   $$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi_n'' = E_n\phi_n \Rightarrow E_n = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\phi_n''}{\phi_n} = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2}$$
   Entonces $\langle E\rangle = (17/5)E_1 = (17/5)(\hbar^2\pi^2)/(2ma^2)$.
   La fuerza sobre las paredes es $F = -d\langle E\rangle/da = (34/5)(\hbar^2\pi^2)/(2ma^3)$.
   Nota: Si se calcula la fuerza sobre la partícula mediante la ec. de Ehrenfest sale cero, porque la fuerza total es ejercida por las dos paredes que ejercen dos fuerzas iguales y opuestas. El resultado que se obtiene aquí es el mismo que daría una partícula clásica con energía $\langle E\rangle$ rebotando en las paredes, y tomado el promedio en el tiempo.

   c)Dado que $V = 0$ en toda la zona donde $\psi \neq 0$, $T = P^2/2m = H$. Los valores de T que pueden salir son E_1 y E_2, con probabilidades $P(E_1) = 1/5$ y $P(E_2) = 4/5$.

   d) $(\Delta E)^2 = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2$;
   $\langle E^2\rangle = E_1^2/5 + (4/5)E_2^2 = E_1^2/5 + (4/5)\cdot(4E_1)^2 = (65/5)E_1^2 = 13E_1^2$
   Por otro lado $\langle E\rangle = (17/5)E_1$, según el apartado b).
   Queda pues: $(\Delta E)^2 = 13E_1^2 - (17/5)^2E_1^2 = (36/25)E_1^2$
   $(\Delta E) = (6/5)E_1 = (6/5)(\hbar^2\pi^2)/(2ma^2)$.

2. a)Sean $|\phi_n \rightarrow$ los estados propios del hamiltoniano del sistema (oscilador armónico). Las propeidades más importantes de a^+, a, y N son:
   $a^+|\phi_n\rangle = \sqrt{n+1}\phi_{n+1}\rangle$; $a|\phi_n\rangle = \sqrt{n}|\phi_{n-1}\rangle$; $N|\phi_n\rangle = n|\phi_n\rangle$
   $H = \hbar\omega(N + 1/2)$. El espectro de N es el conjunto de los enteros no negativos: 0,1,2,3,4,...
   b)Según las propiedades enunciadas, $a|\phi_0\rangle = 0$. Sustituyendo la definición:$1/\sqrt{2}(X' + P')\phi_0\rangle = 0$. En representación $|r\rangle$, $P = -i\hbar d/dx$. Sustituyendo queda:
   $$\frac{m\omega}{\hbar}x\phi_0(x) + \phi_0'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\phi_0'}{\phi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar}x \Rightarrow \ln(\phi_0(x)) = -\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + C \Rightarrow \phi_0(x) = A\exp(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2)$$
   La constante de integración A se determina por la condición de normalización:
   $$1 = |A|^2\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)dx$$

Llamando $u = \sqrt{m\omega x/\hbar}$ queda: $1 = |A|^2\sqrt{\hbar/(m\omega)}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-u^2)du$, o sea $1 = |A|^2\sqrt{\hbar/(m\omega)}\sqrt{\pi}$.
Hay libertad para elegir el argumento de A. Eligiéndolo real tenemos: $A = (m\omega/(\pi\hbar)^{1/4}$.

c) La propiedad más importante de a^+ es $a^+|\phi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\phi_{n+1}\rangle$, que podemos aplicar a cualquier estado para obtener el siguiente.
Por tanto: $a^+|\phi_0\rangle = \sqrt{1}|\phi_1\rangle$.
En representación $|\mathbf{r}\rangle$ es $a^+ = (X' - iP')/\sqrt{2}$, y $\phi_0(x) = A\exp(-m\omega x^2/(2\hbar)$. Entonces:

$$\phi_1(x) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\frac{m\omega}{\hbar}x - \frac{d}{dx}\right]A\exp(-m\omega x^2/(2\hbar) = \left[\frac{4}{\pi}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^3\right]^{1/4} x\exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right]$$

3. a) Teniendo en cuenta que $L_x = (L_+ + L_-)/2$, determinamos primero la actuación de L_x sobre un estado propio de H, L^2, L_z:
$L_x|n,l,m\rangle = (1/2)\hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}|n,l,m+1\rangle + (1/2)\hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}|n,l,m-1\rangle$. Para el caso particular $l = 1$ y para los tres valores posibles de m tenemos:

$$L_x|n,1,1\rangle = (1/2)\hbar\sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}|n,1,0\rangle = \hbar/\sqrt{2}|n,1,0\rangle$$

$$L_x|n,1,0\rangle = \hbar/\sqrt{2}(|n,1,1\rangle + |n,1,-1\rangle)$$

$$L_x|n,1,-1\rangle = \hbar\sqrt{2}|n,1,0\rangle$$

La **matriz** que representa L_x en esta base es: $L_x = \hbar/\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

El polinomio característico en autovalores (de la matriz, sin el prefactor) es: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

Cuyas raíces son $\lambda = \pm\sqrt{2}, 0$, que corresponden a **los tres autovalores** de L_x: $\pm\hbar, 0$.
Las componentes de los **autovectores** en la base dada se obtienen escribiendo el sistema homogéneo de ecuaciones, uno para cada λ:
$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$
Para $\lambda = \sqrt{2}$ tenemos $x_1 = x_3 = x_2/\sqrt{2}$, o sea, normalizando:
(1) $|n,1,1\rangle_x = (1/2)(|n,1,1\rangle_z + \sqrt{2}|n,1,0\rangle_z + |n,1,1\rangle_z)$.
Análogamente para $\lambda = -\sqrt{2}$, resulta $x_1 = x_3 = -x_2/\sqrt{2}$ y normalizando queda el autovector (2) $|n,1,-1\rangle_x = (1/2)(|n,1,1\rangle_z - \sqrt{2}|n,1,0\rangle_z + |n,1,1\rangle_z)$. Finalmente para $\lambda = 0$ queda $x_2 = 0$ y $x_1 = -x_3$. El autovector normalizado es (3) $|n,1,0\rangle_x = (1/\sqrt{2})(|n,1,1\rangle_z - |n,1,-1\rangle_z)$.

b) Necesitamos expresar el ket de estado del enunciado como combinación lineal de los autovectores de H, L^2 y L_x. Restando las ecuaciones (1) $-$ (2) queda:
$|n,1,0\rangle_z = (1/\sqrt{2})(|n,1,1\rangle_x - |n,1,-1\rangle_x)$
Haciendo $[(1) + (2) + \sqrt{2}\times(3)]/2$ queda:
$|n,1,1\rangle_z = (1/2)(|n,1,1\rangle_x + \sqrt{2}\quad|n,1,0\rangle_x + \quad|n,1,-1\rangle_x)$
y haciendo $[(1) + (2) - \sqrt{2}\times(3)]/2$ queda:
$|n,1,-1\rangle_z = (1/2)(|n,1,1\rangle_x - \sqrt{2}\quad|n,1,0\rangle_x + \quad|n,1,-1\rangle_x)$

El estado dado es:
$|\psi\rangle = (i/\sqrt{3})|2,1,1\rangle_z + \sqrt{2/3}|3,1,0\rangle_z =$
$= (i/\sqrt{3})(1/2)(|2,1,1\rangle_x + \sqrt{2}\quad|2,1,0\rangle_x + \quad|2,1,-1\rangle_x) + \sqrt{2/3}(1/\sqrt{2})(|3,1,1\rangle_x - |3,1,-1\rangle_x))$
Como aparecen vectores propios de L_x con los valores propios $\pm\hbar$ y 0, **esos son los valores que pueden salir** en una medida de L_x.

Las probabilidades son, según el postulado 4º, caso b (aparecen varios kets distintos con el mismo valor propio de L_x) tenemos **las probabilidades:**

$P(+\hbar) = |(1/2)(i/\sqrt{3})|^2 + |\sqrt{2/3}(1/\sqrt{2})|^2 = 5/12$
$P(-\hbar) = |(1/2)(i/\sqrt{3})|^2 + |-\sqrt{2/3}(1/\sqrt{2})|^2 = 5/12$
y $P(0) = |(i/\sqrt{3})\sqrt{2}/2|^2 = 1/6 = 2/12$.

c) El estado $|\psi\rangle$ ya está dado como combinación lineal de dos vectores propios de H luego la energía media es

$$\langle E\rangle = \langle H\rangle = |(i/\sqrt{3})|^2 E_2 + |\sqrt{2/3}|^2 E_3 = \frac{1}{3}\frac{-E_I}{2^2} + \frac{2}{3}\frac{-E_I}{3^2} = -(17/108)E_I$$