

## 8. Suma de momentos angulares

- 0) Introducción
- 1) Definición de momento angular total
- 2) Suma de dos spines  $\frac{1}{2}$
- 3) Suma de dos J's cualesquiera
- 4) Coeficientes de Clebsch-Gordan
- 5) Un ejemplo: dos partículas con hamiltoniano de Heisenberg
- 6) Teorema de Wigner-Eckart

## 0 Introducción

El problema que tratamos aquí es el momento angular de un sistema de varias partículas, centrándonos en el caso de DOS PARTÍCULAS

El caso se presenta muy frecuentemente en Mecánica Cuántica.

Algunos casos particulares importantes:

- 1) Momento angular total de una partícula con  $L$  y  $S$ .
- 2) Átomos con varios electrones
- 3) Una partícula formada por varias (deuterón, partícula  $\alpha$ , ...)

# 1 Definición del momento angular total

Consideremos un sistema de DOS PARTÍCULAS DISTINTAS (más adelante se verán las condiciones para partículas iguales) con momentos angulares.

El espacio de estados de cada una  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$  está basado en los kets:

$$|k_1, j_1, m_1\rangle \quad |k_2, j_2, m_2\rangle$$

Que son los vectores propios del momento angular de la partícula 1,  $\mathbf{J}_1^2$ ,  $J_{1z}$  y algún otro operador que conmute con ellos para formar un CSCO. El índice  $k_1$  numera autovectores de  $\mathbf{J}_1^2$ ,  $J_{1z}$  con los mismos  $j$ ,  $m$  y distintos autovalores del otro operador

Análogamente para la partícula 2.

Cada una puede estar en un estado cualquiera de su espacio, luego el estado del sistema queda descrito por el **PRODUCTO TENSORIAL**  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$

Una base de dicho espacio es:  $|k_1, j_1, m_1\rangle \otimes |k_2, j_2, m_2\rangle \equiv |k_1, k_2, j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$

En el espacio total, definimos los operadores “**momento angular total**”:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &\equiv \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2; J_x = J_{1x} + J_{2x}; J_y = J_{1y} + J_{2y}; J_z = J_{1z} + J_{2z} \\ J_+ &= J_x + iJ_y; J_- = J_x - iJ_y \end{aligned}$$

Las relaciones de conmutación de  $\mathbf{J}^2$ ,  $J_x$ ,  $J_y$  y  $J_z$  son las de todos los momentos angulares es decir

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z; [J_y, J_z] = i\hbar J_x; [J_z, J_x] = i\hbar J_y$$

Sin embargo  $\mathbf{J}^2$ , no conmuta ni con  $J_{1z}$  ni con  $J_{2z}$

$$\mathbf{J}^2 = (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)^2 = \mathbf{J}_1^2 + \mathbf{J}_2^2 + 2\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 = \mathbf{J}_1^2 + \mathbf{J}_2^2 + 2(J_{1x}J_{2x} + J_{1y}J_{2y} + J_{1z}J_{2z})$$

$$[\mathbf{J}^2, J_{1z}] = 2J_{2x}[J_{1x}, J_{1z}] + 2J_{2y}[J_{1y}, J_{1z}] = -2i\hbar J_{2x}J_{1y} + 2i\hbar J_{2y}J_{1x} \neq 0$$

Es útil la expresión (demostrarla):

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{J}_1^2 + \mathbf{J}_2^2 + 2\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 = \mathbf{J}_1^2 + \mathbf{J}_2^2 + 2J_{1z}J_{2z} + J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+}$$

Es fácil ver que  $\mathbf{J}^2$ ,  $J_z$  conmutan entre sí, y con  $\mathbf{J}_1^2$  y  $\mathbf{J}_2^2$

En este capítulo se trata de encontrar la base de autovectores comunes a  $\mathbf{J}_1^2$ ,  $\mathbf{J}_2^2$ ,  $\mathbf{J}^2$  y  $J_z$

## 2 Suma de dos spines 1/2

Consideremos primero el caso de dos spines 1/2:

Base de autovectores de  $\mathbf{S}_1^2, S_{1z}, \mathbf{S}_2^2, S_{2z}$  (las  $k$ 's no importan aquí)

$$\{|k_1 j_1 m_1\rangle \otimes |k_2 j_2 m_2\rangle\} = \left\{ \left| k \frac{1}{2} m \right\rangle, m = \pm \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$$

Actuación de  $S_z$ :

$$S_z |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle = (S_{1z} + S_{2z}) |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle = \frac{1}{2} \hbar \varepsilon_1 |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle + \frac{1}{2} \hbar \varepsilon_2 |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle = \frac{1}{2} \hbar (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle$$

⇒ Los 4 vectores de la base son autovectores de  $S_z$  total

⇒ los autovalores de  $S_{1z}$  y  $S_{2z}$  se suman

$$S_z |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle = M \hbar |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle \quad \text{con} \quad M = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = m_1 + m_2 = 0, \pm 1 \quad (S_z) = \hbar \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Actuación de  $\mathbf{S}^2$ :

Recordemos que

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}_1^2 + \mathbf{S}_2^2 + 2S_{1z}S_{2z} + S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+}$$

Entonces:  $S_{1+}S_{2-}|++\rangle = 0$      $S_{1+}S_{2-}|+-\rangle = 0$      $S_{1+}S_{2-}|--\rangle = 0$

$$S_{1+}S_{2-}| - + \rangle = \hbar^2 \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)} | - + \rangle = \hbar^2 | - + \rangle$$

$$S_{1-}S_{2+}|++\rangle = 0 \quad S_{1-}S_{2+}| - + \rangle = 0 \quad S_{1-}S_{2+}| -- \rangle = 0 \quad S_{1-}S_{2+}| - + \rangle = \hbar^2 | - + \rangle$$

$$\mathbf{S}^2|++\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|++\rangle + \frac{3}{4}\hbar^2|++\rangle + 2\hbar^2 \frac{1}{2} \frac{1}{2}|++\rangle + 0 + 0 = 2\hbar^2|++\rangle$$

$$\mathbf{S}^2|+-\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|+-\rangle + \frac{3}{4}\hbar^2|+-\rangle - 2\hbar^2 \frac{1}{2} \frac{1}{2}|+-\rangle + 0 + \hbar^2| - + \rangle = \hbar^2(|+-\rangle + | - + \rangle)$$

$$\mathbf{S}^2| - + \rangle = \frac{3}{4}\hbar^2| - + \rangle + \frac{3}{4}\hbar^2| - + \rangle - 2\hbar^2 \frac{1}{2} \frac{1}{2}| - + \rangle + \hbar^2|+-\rangle = \hbar^2(|+-\rangle + | - + \rangle)$$

$$\mathbf{S}^2|--\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|--\rangle + \frac{3}{4}\hbar^2|--\rangle + 2\hbar^2 \frac{1}{2} \frac{1}{2}|--\rangle = 2\hbar^2|--\rangle$$

La matriz que representa  $\mathbf{S}^2$  en la base de de  $\mathbf{S}_1^2, S_{1z}, \mathbf{S}_2^2, S_{2z}$ :

$$(\mathbf{S}^2) = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Es decir que  $|++\rangle$  y  $|--\rangle$  son autovectores con valor propio  $2\hbar^2$

$|+-\rangle$  y  $|-+\rangle$  no son autovectores sino que forman un subespacio propio

La matriz que representa  $\mathbf{S}^2$  en la base de de  $\mathbf{S}_1^2, S_{1z}, \mathbf{S}_2^2, S_{2z}$ :

Por no hacer pesada la notación vamos a diagonalizar aparte la caja "llena de unos":

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Los autovalores de  $\mathbf{S}^2$  son pues  $2\hbar^2$ ,  $\hbar^2$  y 0

Autovectores:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con  $\lambda = 2$ :  $|++\rangle, |--\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle)$  “triplete”

Elegimos el coeficiente de normalización real y positivo

Con  $\lambda = 0$ :  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$  “singlete”

Hay que notar que si hablamos solamente de autovectores de  $\mathbf{S}^2$  cualquier combinación de los tres primeros vale.

Sin embargo autovectores comunes a  $\mathbf{S}^2$  y  $S_z$ , sólo son los tres indicados (salvo por un factor numérico multiplicando a cada uno).



Es obvio que  $|++\rangle$  y  $|--\rangle$  lo son, con autovalores  $+\hbar$  y  $-\hbar$

Pero también: 
$$S_z \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle) = (S_{1z} + S_{2z}) \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle) =$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2} |+-\rangle - \frac{1}{2} |-+\rangle - \frac{1}{2} |+-\rangle + \frac{1}{2} |-+\rangle \right) = 0 = 0 \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle)$$

En resumidas cuentas, los  $|++\rangle, |--\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle)$

Forman una base  $\{|S, M\rangle\}$  de autovectores de  $\mathbf{S}^2$  y  $S_z$ , con  $S = 1$  (el autovalor es  $S(S+1)\hbar^2 = 2\hbar^2$ ), y  $M = \pm 1, 0$ , correspondiente a un momento angular total :

$$S = s_1 + s_2$$

$|S, M\rangle$ :

$$|1, 1\rangle = |++\rangle$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle)$$

$$|1, -1\rangle = |--\rangle$$

Ejercicio: mostrar que también  $S_{\pm} |S, M\rangle = \hbar \sqrt{S(S+1) - M(M \pm 1)} |S, M \pm 1\rangle$

Por otra parte el  $|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle)$  Corresponde a  $S = s_1 - s_2 = 0$

### 3. Suma de dos $\mathbf{J}$ 's cualesquiera

El espacio de estados es el producto tensorial  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$  cuya base de autovectores de  $\mathbf{J}_1^2$ ,  $\mathbf{J}_2^2$ ,  $J_{1z}$  y  $J_{2z}$   $\{|k_1 j_1 m_1\rangle \otimes |k_2 j_2 m_2\rangle\} \equiv \{|k_1, k_2; j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$

Cuyos autovalores respectivos son:  $j_1(j_1 + 1)\hbar^2, m_1\hbar, j_2(j_2 + 1)\hbar^2, m_2\hbar$

Se define el operador vectorial:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$$

Queremos encontrar los autovectores y autovalores de  $\mathbf{J}_1^2$ ,  $\mathbf{J}_2^2$ ,  $\mathbf{J}^2$  y  $J_z$ , que vamos a denotar

$$\{|j_1, j_2; J, M\rangle\}$$

Se trata de diagonalizar las matrices que corresponden a  $\mathbf{J}^2$  y  $J_z$ .

**No dependen de  $k_1$  ni de  $k_2$  así que los hacemos desaparecer de la notación**

## Elementos de matriz de $J_z$

Supongamos que  $j_1 \geq j_2$ :

$$J_z |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = (J_{1z} + J_{2z}) |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle = m_1 \hbar |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle + m_2 \hbar |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = (m_1 + m_2) \hbar |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

Es decir, cada uno de los estados de la base tomada es ya autovector de  $J_z$  con el autovalor:

$$M = m_1 + m_2$$

Notar que los valores de  $M$  son enteros si  $j_1$  y  $j_2$  son los dos enteros o semienteros

y son semienteros si uno sólo de los  $j_1, j_2$  lo es

**Degeneración:** Se trata de ver cuántos vectores de la base corresponden al mismo  $M$  total. Sea este número

$$g_{j_1 j_2}(M)$$

Notar que es el mismo problema que determinar de cuántas maneras posibles se puede obtener un total fijado tirando dos dados (de  $2j_1+1$  y  $2j_2+1$  caras) a la vez.

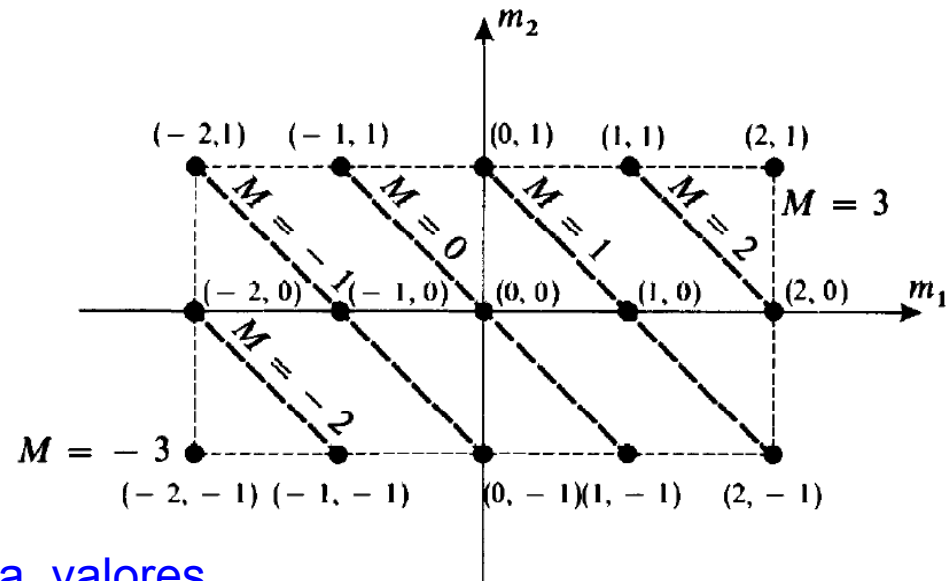
Teniendo en cuenta que:  $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$  y  $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$

El **máximo** valor posible de  $M$  es  $j_1+j_2$  y éste es simple, porque sólo se puede obtener con la combinación  $m_1=j_1$  y  $m_2=j_2$ .

El siguiente valor posible de  $M$  es  $j_1+j_2-1$  y es doble, ya que se puede obtener con las combinación  $m_1=j_1-1$  y  $m_2=j_2$ , o bien con la  $m_1=j_1$  y  $m_2=j_2-1$

Así sucesivamente, el **mínimo** valor posible de  $M$  es  $-(j_1+j_2)$  y es simple

Gráficamente (dibujado para  $j_1=2, j_2=1$ ) todos los estados con la misma  $M$  caen en una recta de pendiente  $-1$ , dentro del rectángulo de lados  $2j_1$  y  $2j_2$



La **mayor degeneración** ocurre para valores

de  $M$  tales que:

$$-(j_1 - j_2) \leq M \leq j_1 - j_2 \quad \text{y} \quad g_{j_1 j_2}(M = j_1 - j_2) = 2j_2 + 1$$

## Autovalores de $\mathbf{J}^2$ y $J_z$

El espacio de autovectores de  $\mathbf{J}_1^2$ ,  $\mathbf{J}_2^2$ ,  $J_{1z}$  y  $J_{2z}$  se descompone en subespacios de autovectores de  $\mathbf{J}^2$  y  $J_z$ .

Veremos luego que cada  $J$  sale sólo una vez o ninguna

Antes de demostrarlo, anticipemos la conclusión importante

Los valores de  $J$  que salen cumplen:

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$$

Para un valor posible de  $J$ ,  $M$  toma los valores  $-J \leq M \leq +J$ , de uno en uno y hay varios  $M$  iguales que corresponden a distintas  $J$ 's

El máximo valor posible de  $M$  es  $M_{\max} = j_1 + j_2$ , por tanto este es el valor máximo de  $J$  total.

$$J_{\max} = j_1 + j_2$$

El autovector  $|J=j_1+j_2, M=j_1+j_2\rangle$  es simple:

$$|j_1, j_2; J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2\rangle = |j_1, j_2; m_1 = j_1, m_2 = j_2\rangle$$

El resto de los autovectores se obtiene aplicando sucesivamente el operador  $J_-$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} J_- |j_1, j_2; m_1 = j_1, m_2 = j_2\rangle &= (J_{1-} + J_{2-}) |j_1, j_2; m_1 = j_1, m_2 = j_2\rangle = \\ &= \hbar \left[ \sqrt{j_1(j_1+1) - j_1(j_1-1)} |j_1, j_2; j_1-1, j_2\rangle + \sqrt{j_2(j_2+1) - j_2(j_2-1)} |j_1, j_2; j_1, j_2-1\rangle \right] = \\ &= \hbar \sqrt{2j_1} |j_1, j_2; j_1-1, j_2\rangle + \hbar \sqrt{2j_2} |j_1, j_2; j_1, j_2-1\rangle \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} J_- |j_1, j_2; m_1 = j_1, m_2 = j_2\rangle &= J_- |j_1, j_2; J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2\rangle = \\ &= \hbar \sqrt{J(J+1) - M(M-1)} |j_1, j_2; J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2 - 1\rangle = \\ &= \hbar \sqrt{2J} |j_1, j_2; J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2 - 1\rangle = \\ &= \hbar \sqrt{2(j_1 + j_2)} |j_1, j_2; J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2 - 1\rangle \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} |j_1, j_2; J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2 - 1\rangle &= \\ &= \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} |j_1, j_2; m_1 = j_1 - 1, m_2 = j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} |j_1, j_2; m_1 = j_1, m_2 = j_2 - 1\rangle \end{aligned}$$

Aplicando varias veces  $J_-$  obtenemos los demás vectores que corresponden a  $J = j_1 + j_2$

Finalmente se tiene

$$|j_1, j_2; J = j_1 + j_2, M = -(j_1 + j_2)\rangle = |j_1, j_2; m_1 = -j_1, m_2 = -j_2\rangle$$

Hay  $2J + 1 = 2(j_1 + j_2) + 1$  vectores, todos ellos ortonormales por construcción.

Otros valores de  $J$  (otros subespacios  $\mathcal{E}(J)$ )

Para  $J = j_1 + j_2 - 1$  el mayor  $M$  posible es  $j_1 + j_2 - 1$ , y hay dos vectores independientes con esa  $M$ , que son  $|j_1, j_2, m_1 = j_1 - 1, m_2 = j_2\rangle$  y  $|j_1, j_2, m_1 = j_1, m_2 = j_2 - 1\rangle$

...pero una combinación de ellos ya la hemos usado en la obtención de los autovectores con  $J = j_1 + j_2$  y diferentes  $M$ 's

Queda otra única combinación posible (salvo un factor numérico global) que sea ortogonal a la anterior

Teníamos  $|j_1, j_2; J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2 - 1\rangle =$

$$\sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} |j_1, j_2; m_1 = j_1 - 1, m_2 = j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} |j_1, j_2; m_1 = j_1, m_2 = j_2 - 1\rangle$$

Sin necesidad de cálculos complicados es obvio que la única combinación posible ortonormal a la anterior, salvo por un factor de fase global, es:

$$|j_1, j_2; J = j_1 + j_2 - 1, M = J\rangle =$$

$$\sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} |j_1, j_2; m_1 = j_1 - 1, m_2 = j_2\rangle - \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} |j_1, j_2; m_1 = j_1, m_2 = j_2 - 1\rangle$$

Ahora obtenemos los demás vectores con ese  $J$  y diferentes  $M$ 's aplicando  $J_-$ :

$$J_- |j_1, j_2; J, M\rangle = \hbar \sqrt{J(J+1) - M(M-1)} |j_1, j_2; J, M-1\rangle$$

Para  $J = j_1 + j_2 - 2$  el mayor  $M$  posible es  $j_1 + j_2 - 2$ , y hay tres vectores independientes con esa  $M$ , ... ya la hemos usado dos combinaciones en la obtención de los autovectores con  $J = j_1 + j_2$  y  $J = j_1 + j_2 - 1$

Queda otra única combinación posible (salvo por un factor) que sea ortogonal a las dos anteriores. De nuevo se obtienen todos los vectores para  $J = j_1 + j_2 - 2$  con  $M$  diferentes aplicando  $J_-$



El proceso **finaliza** con  $J = j_1 - j_2$  (**el último  $J$  posible**) pues ya no quedan vectores linealmente independientes que no se hayan usado anteriormente para la obtención de los vectores con  $J$  mayores y diferentes  $M$ .

Esto ocurre porque mientras  $M > j_1 - j_2$  la degeneración de  $M$  aumenta en una unidad cada vez que se disminuye  $M$ , pero no ahora que  $M \leq j_1 - j_2$

**Conclusión importante:** Los valores de  $J$  total que pueden salir (admitimos ya que  $j_1$  pueda ser menor que  $j_2$ ) cumplen:

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$$

El espacio total de estados (con  $j_1$  y  $j_2$  fijados) **es la suma directa** de los subespacios que corresponden a todas las  $J$ 's permitidas, de dimensión  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ .

Ejercicio. Probar que para cualquier par de valores  $j_1 \geq j_2 \geq 0$ , enteros, semienteros o uno de cada forma, se cumple:

$$\sum_{J=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2J+1) = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

## 4. Coeficientes de Clebsch-Gordan

En general se puede escribir:

$$|j_1, j_2; J, M\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | JM\rangle$$

Los coeficientes se llaman de Clebsch-Gordan:

Algunas propiedades:

1) Se pueden elegir reales (criterio de signos de Condon-Shortley)

$$2) \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | JM\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J' M'\rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'}$$

$$3) \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^J \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | JM\rangle \langle j_1, j_2; m'_1, m'_2 | JM\rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}$$

4) Recurrencia (muy útil para calcularlos con un programa):

$$\begin{aligned} & \sqrt{J(J+1) - M(M+1)} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M+1\rangle \\ &= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)} \langle j_1, j_2; m_1-1, m_2 | J, M\rangle \\ &+ \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)} \langle j_1, j_2; m_1, m_2-1 | J, M\rangle \end{aligned}$$

5) Cambio de orden  $\langle j_2, j_1; m_2, m_1 | J, M \rangle = (-1)^{j_1+j_2-J} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M \rangle$

6) Cambio de signo de las  $m$ 's

$$\langle j_1, j_2; -m_1, -m_2 | J, -M \rangle = (-1)^{j_1+j_2-J} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M \rangle$$

7) Otras notaciones frecuentes:

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_3 m_3 \rangle \equiv C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j_3 m_3} \equiv (-1)^{-j_1+j_2-m_3} \sqrt{2j_1+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix}$$

= Símbolos 3j de Wigner (muy usados en F. Atómica)

# 40. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND $d$ FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for  $-8/15$  read  $-\sqrt{8/15}$ .

Notation:

$J$	$J$	$\dots$
$M$	$M$	$\dots$
$m_1$	$m_2$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Coefficients		

$$1/2 \times 1/2$$

1			
+1	1	0	
+1/2+1/2	1	0	0
+1/2	-1/2	1/2	1/2
-1/2	+1/2	1/2	-1/2
-1/2	-1/2	1	

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

 $2 \times 1/2$ 

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

5/2			
+5/2	1	5/2	3/2
+2	+1/2	1	+3/2+3/2
+2	-1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	-1/5
+1/2	+1/2	5/2	3/2

 $1 \times 1/2$ 

3/2			
+3/2	3/2	1/2	
+1	+1/2	1	+1/2+1/2
+1	-1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	-1/3
0	-1/2	2/3	1/3
-1	+1/2	1/3	-2/3
-1	-1/2	3/2	1/2

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

 $3/2 \times 1/2$ 

2			
+2	2	1	
+3/2	+1/2	1	+1
+3/2	-1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	-1/4
+1/2	-1/2	1/2	1/2
-1/2	+1/2	1/2	-1/2
-1	-1/2	4/5	1/5
-2	+1/2	1/5	-4/5
-2	-1/2	5/2	3/2
-2	-1/2	-3/2	-3/2

 $2 \times 1$ 

3			
+3	3	2	
+2	+1	2	+2
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	-1/3
+1	-1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	-1/3
0	-1/2	2/3	1/3
-1	+1/2	1/3	-2/3
-1	-1/2	3/2	1/2
-1	-1/2	-3/2	-3/2

 $3/2 \times 1$ 

5/2			
+5/2	5/2	3/2	
+3/2	+1	+3/2	+3/2
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	-2/5
+1/2	-1	1/10	2/5
+1/2	0	3/5	1/15
-1/2	+1	3/10	-8/15
-1/2	-1	1/6	1/6
-1/2	-1/2	5/2	3/2
-1/2	-1/2	-1/2	-1/2

 $1 \times 1$ 

2			
+2	2	1	
+1	+1	1	+1
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	-1/2
0	0	2	1
0	0	0	0
+1	-1	1/6	1/2
0	0	2/3	0
-1	+1	1/6	-1/2
-1	-1	1/3	1/3
-1	-1	-1	-1

3	2	1
0	0	0
+1	-1	1/5
1/2	2/3	3/10
3/5	0	-2/5
1/5	-1/2	3/10
-1	-1	-1
0	-1	2/5
-1	0	8/15
-2	+1	1/15
-2	-1	-1/3
-2	-2	3/5
-2	-2	-2

2	1
+1/2	-1
-1/2	0
-3/2	+1
3/10	8/15
3/5	-1/15
1/10	-2/5
-1/2	1/2
-1/2	-1/2
-1/2	-1/2
-1/2	-1
-1/2	-1
-1/2	-1

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

2			
0	-1	1/2	1/2
-1	0	1/2	-1/2
-1	-1	1	1

$$d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$$

3			
-1	-1	2/3	1/3
-2	0	1/3	-2/3
-2	-1	1	1

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M)$$

$$= (-1)^{J-j_1-j_2} (j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M)$$

$$d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{m,m'}^j = d_{-m,-m'}^j$$

 $3/2 \times 3/2$ 

3			
+3	3	2	
+3/2	+3/2	1	+2
+3/2	+1/2	1/2	1/2
+1/2	+3/2	1/2	-1/2
+3/2	-1/2	1/5	1/2
+1/2	+1/2	3/5	0
-1/2	+3/2	1/5	-1/2
3	2	1	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

$$d_{0,0}^1 = \cos \theta$$

$$d_{1/2,1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1,1}^1 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$d_{1/2,-1/2}^{1/2} = -\sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1,0}^1 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$$

$$d_{1,-1}^1 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

 $2 \times 2$ 

4			
+4	4	3	

7/2			
+7/2	7/2	5/2	
+2	+3/2	1	+5/2+5/2
+2	+1/2	3/7	4/7
+1	+3/2	4/7	-3/7
+2	-1/2	1/7	16/35
+1	+1/2	4/7	1/35
0	+3/2	2/7	-18/35
+1/2	+1/2	7/2	5/2
+1/2	+1/2	3/2	1/2
-1/2	+1/2	1/20	1/4
-1/2	-1/2	9/20	1/4
-1/2	-1/2	9/20	-1/4
-1/2	+1/2	9/20	-1/4
-1/2	+1/2	1/4	9/20
-1/2	+1/2	1/4	-9/20
-1/2	+1/2	1/4	-9/20

3	2	1	0
+3/2	-3/2	1/20	1/4
+1/2	-1/2	9/20	1/4
-1/2	+1/2	9/20	-1/4
-1/2	+1/2	9/20	-1/4
-1/2	+1/2	1/4	9/20
-1/2	+1/2	1/4	-9/20
-1/2	+1/2	1/4	-9/20

### 40. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND $d$ FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for  $-8/15$  read  $-\sqrt{8/15}$ .

$1/2 \times 1/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>+1/2+1/2</td><td>1</td></tr> <tr><td>+1/2-1/2</td><td>1/2</td></tr> <tr><td>-1/2+1/2</td><td>1/2</td></tr> <tr><td>-1/2-1/2</td><td>1</td></tr> </table>	1	0	+1/2+1/2	1	+1/2-1/2	1/2	-1/2+1/2	1/2	-1/2-1/2	1	$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$ $Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$ $Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$ $Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$ $Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$	$2 \times 1/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+2+1/2</td><td>1</td></tr> <tr><td>+2-1/2</td><td>1/5</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>4/5</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>2/5</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>3/5</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>2/5</td></tr> </table>	5/2	3/2	+2+1/2	1	+2-1/2	1/5	+1+1/2	4/5	+1-1/2	2/5	0+1/2	3/5	0-1/2	2/5	$2 \times 1/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+3/2</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>4/5</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>2/5</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>3/5</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>2/5</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+3/2	1	+3/2-1/2	1/3	+1+1/2	4/5	+1-1/2	2/5	0+1/2	3/5	0-1/2	2/5	$3/2 \times 1/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2+1/2</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1/2</td><td>1/4</td></tr> <tr><td>+1/2+1/2</td><td>3/4</td></tr> <tr><td>+1/2-1/2</td><td>3/4</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>1/4</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>3/4</td></tr> </table>	2	1	+3/2+1/2	1	+3/2-1/2	1/4	+1/2+1/2	3/4	+1/2-1/2	3/4	0+1/2	1/4	0-1/2	3/4	$3/2 \times 1$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 1$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>+2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	3	2	+2+1	1	+2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>+2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+2-1</td><td>1/5</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/5</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/5</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/5</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/5</td></tr> </table>	3	2	+2+1	1	+2-1	1/5	+1+1/2	2/5	+1-1/2	1/5	0+1/2	2/5	0-1/2	1/5	$3 \times 3$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>+2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	3	2	+2+1	1	+2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td>1</td></tr> <tr><td>+3/2-1</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>+1+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>+1-1/2</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>0+1/2</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>0-1/2</td><td>1/3</td></tr> </table>	5/2	3/2	+3/2+1	1	+3/2-1	1/3	+1+1/2	2/3	+1-1/2	1/3	0+1/2	2/3	0-1/2	1/3	$3 \times 3/2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2+1</td><td></td></tr></table>	5/2	3/2	+3/2+1	
1	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1/2+1/2	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1/2-1/2	1/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
-1/2+1/2	1/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
-1/2-1/2	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+2+1/2	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+2-1/2	1/5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	4/5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	2/5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	3/5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	2/5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+3/2	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	4/5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	2/5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	3/5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	2/5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
2	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1/2	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1/2	1/4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1/2+1/2	3/4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1/2-1/2	3/4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	1/4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	3/4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+2-1	1/5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2-1	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+1-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0+1/2	2/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
0-1/2	1/3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
5/2	3/2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
+3/2+1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											

## 5. Un ejemplo de combinación de J's

Se tiene un sistema de dos partículas de momentos angulares fijados  $j_1$  y  $j_2$  distintas situadas en lugares fijos del espacio y un hamiltoniano llamado "de Heisenberg":

$$H = a\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2$$

Comentario: dos átomos de un sólido se adaptan, bien a esta situación. En F. Atómica se verá que muy frecuentemente  $j_1$  y  $j_2$  están fijados porque los estados de cada átomo con otros valores de  $j_1$  o  $j_2$  corresponden a energías mucho mayores y son inalcanzables.

Resulta que se puede escribir: 
$$\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^2 - \mathbf{J}_1^2 - \mathbf{J}_2^2)$$

Y tenemos un caso en que el hamiltoniano no conmuta con  $J_{1z}$  ni con  $J_{2z}$  pero sí con  $\mathbf{J}_1^2$ ,  $\mathbf{J}_2^2$ ,  $\mathbf{J}^2$  y  $J_z$  (ya que los tres  $\mathbf{J}$ 's que aparecen conmutan entre sí y con  $J_z$ ):

Así pues los vectores  $|j_1 j_2 JM\rangle$  son autovectores del hamiltoniano con autovalores que dependen sólo de  $J$  ya que  $j_1$  y  $j_2$  están fijados.

Autovalores, autovectores y degeneraciones:

$$E_J = \frac{1}{2} a\hbar^2 [J(J+1) - j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)];$$

$$|j_1 j_2; JM\rangle; g(E_J) = 2J + 1$$

Ejemplo:  $j_1 = j_2 = 1 \Rightarrow J = 2, 1, 0$

$$E_2 = a\hbar^2; \{ |2,2\rangle, |2,1\rangle, |2,0\rangle, |2,-1\rangle, |2,-2\rangle \}$$

$$E_1 = -a\hbar^2; \{ |1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle \}$$

$$E_0 = -2a\hbar^2; \{ |0,0\rangle \}$$

Físicamente los estados con  $J = 2$  significan que los dos momentos son paralelos con el mismo sentido, y tienen cualquier dirección en el espacio, ya que al estar todos los posibles valores de  $M$ , significa que cualquier combinación de ellos es de la misma energía, en particular la que da con toda seguridad  $J_u = 2\hbar$  al medir la componente de  $\mathbf{J}$  en una dirección arbitraria  $\mathbf{u}$ .

Esto ocurre porque el hamiltoniano es isótropo: no depende más que del ángulo entre los momentos, no de su dirección

La de  $J = 0$  indica que los dos momentos son “antiparalelos” (paralelos en sentidos opuestos), con dirección indeterminada, ya que la probabilidad de obtener  $J_{1u} = \hbar$  es la misma para cualquier dirección. Sin embargo si se mide  $J_{2z}$  después de  $J_{1z}$  saldrá exactamente lo opuesto. **Verificar ambas cosas.**

Físicamente los estados con  $J = 1$  significan que los dos momentos forman con toda seguridad un ángulo de  $120^\circ$ , pues  $J(J+1) = j_1(j_1+1) = j_2(j_2+1)$ . Sin embargo la dirección es indeterminada.

Supongamos que se aplica un campo magnético externo  $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_z$ .

El hamiltoniano pasa a ser:

$$H = a\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 - \gamma\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{B} - \gamma\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2}a(\mathbf{J}^2 - \mathbf{J}_1^2 - \mathbf{J}_2^2) - \gamma B(J_{1z} + J_{2z})$$

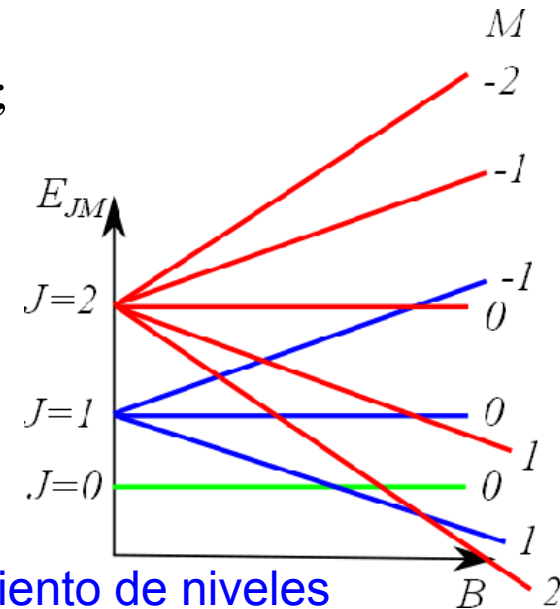
Que también conmuta con  $\mathbf{J}_1^2$ ,  $\mathbf{J}_2^2$ ,  $\mathbf{J}^2$  y  $J_z$ .

Sin embargo ahora los autovalores dependen de  $J$  y  $M$  y son no degenerados salvo para valores especiales de  $B$ .

$$E_{JM} = \frac{1}{2}a\hbar^2[J(J+1) - j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)] - \lambda B\hbar M;$$

$$|j_1 j_2; JM\rangle; g(E_{JM}) = 1$$

Ejemplo:  $j_1 = j_2 = 1$   
Niveles de energía en función del campo



**Aplicación práctica:** para los campos en que hay cruzamiento de niveles la entropía aumenta (es el  $\ln$  del nº de niveles que hay en un intervalo del orden de  $k_B T$ ) y el sistema extrae calor del exterior para conseguirlo.



## 6. Teorema de Wigner-Eckart

Un conjunto de  $2k+1$  cantidades  $\{T_q^k, q = -k, \dots, k\}$  se dice que forma un **tensor irreducible** (bajo el grupo de rotaciones) de rango  $k$  si al hacer una **rotación cualquiera de los ejes de coordenadas**, cada componente se transforma en una **combinación lineal de todas ellas**, pero no se puede escoger un número menor a  $k$  (ni combinaciones lineales) que se transformen sólo entre ellas para TODAS las rotaciones.

**Ejemplo 1:** Las componentes de un vector  $\mathbf{A}(A_x, A_y, A_z)$  en el sistema de ejes de coordenadas  $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$  cambian si tomamos un sistema de coordenadas  $(\mathbf{u}_x', \mathbf{u}_y', \mathbf{u}_z')$  con el mismo origen pero con los ejes rotados.

En general las nuevas componentes se obtienen mediante una matriz de transformación  $O$  que es precisamente real, ortogonal ( $\Leftrightarrow O^{-1} = O^t$ ) y de determinante  $+1$ :

$$\begin{pmatrix} A_x' \\ A_y' \\ A_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ O_{31} & O_{32} & O_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

El concepto geométrico intuitivo de “vector” como “una flecha” es una entidad en si misma, pero difícil de definir matemáticamente.

Es más fácil decir que tres números son las componentes de un vector porque se transforman entre sí de la forma anterior

**Ejemplo 2:** La **temperatura, presión y densidad** del aire en un punto no cambian aunque se cambia a un sistema de ejes rotados: **son tres “escalares”** (= tensores de orden cero) independientes, no un vector.

**Ejemplo 3:** Los elementos **de una matriz simétrica de traza nula**  $M$  se transforma, bajo la misma rotación anterior mediante el producto de matrices

$$M' = OMO^t$$

Son 5 elementos independientes (2 de la diagonal + 3 del triángulo superior o inferior) y forman un tensor de orden 2

**Ejemplo 4:** Los elementos de una matriz cualquiera  $M$  se transforman también entre sí pero el tensor es reducible, porque se puede descomponer en tres partes:

- \* La traza  $\text{Tr}(M)$  que es invariante = escalar
- \*  $M - M^t$  cuyos tres elementos independientes forman un vector (axial)
- \*  $M + M^t - \text{Tr}(M)\mathbb{1}$  que es una matriz simétrica de traza nula y es un tensor irreducible

**Ejemplo 5:** Los **armónicos esféricos** de orden  $l$ :  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  forman un tensor irreducible de orden  $l$ .

Tratando de **operadores cuánticos** se dice

Un conjunto de  $2k+1$  operadores  $\{T_q^k, q = -k, \dots, k\}$  se dice que forma un **operador tensorial irreducible** si las reglas de conmutación con el momento angular total del sistema son.

$$[J_z, T_q^k] = \hbar q T_q^k; \quad [J_{\pm}, T_q^k] = \hbar \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} T_{q \pm 1}^k$$

Esta forma tan rara de definirlo (es equivalente a lo anterior cuando el operador tiene análogo clásico) viene del hecho de que el operador de rotación de un ángulo  $\alpha$  alrededor del eje  $\mathbf{u}$  es (ver CT, complemento B<sub>V1</sub>) :

$$R_u(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}}$$

El **teorema de Wigner-Eckart** dice que el elemento de matriz de la componente  $q$  de un operador tensorial irreducible entre dos estados propios del momento angular total del sistema es:

$$\langle jm | T_q^k | j' m' \rangle = \langle j || T^k || j' \rangle \langle j' k; m' q | jm \rangle$$

Donde  $\langle j || T^k || j' \rangle$  es un **número** (=“elemento de matriz reducido”) que no depende de  $m, m'$  ni  $q$  y el **coeficiente de Clebsch-Gordan** es siempre el mismo e independiente del operador.

En particular el teorema implica que el elemento de matriz es cero si no se cumple que:

$$|j'-k| \leq j \leq j'+k \quad q = m - m'$$

### Caso particular del vector **R**

Las relaciones de conmutación las satisfacen las llamadas **componentes esféricas**:

$$T_1^1 = -\frac{X + iY}{\sqrt{2}}; \quad T_0^1 = Z; \quad T_{-1}^1 = \frac{X - iY}{\sqrt{2}}$$

O inversamente:  $X = \frac{T_{-1}^1 - T_1^1}{\sqrt{2}}$

Así pues los elementos de matriz de **X** son nulos excepto entre estados con  $j'=j$  o  $j'=j \pm 1$  y  $m' = m \pm 1$