

# 1. Propiedades corpusculares de las ondas

1. La Física Cuántica “Antigua”
2. La radiación del cuerpo negro.
3. El efecto fotoeléctrico
4. El efecto Compton

# 1. La Física Cuántica “antigua”.

Tratamos aquí los experimentos históricos que dieron lugar al nacimiento de la Mecánica Cuántica.

Ocurrieron desde 1900 a 1930 aproximadamente.

La teoría cuántica “antigua” no renuncia a la concepción clásica pero va añadiendo “sobre la marcha” hipótesis “ad hoc” (sacadas de la chistera).

Es como decir: “En este juego las reglas son las leyes de Newton y Maxwell, pero cuando me interesa a mí no se cumplen sino que se cumple otra regla especial que me acabo de inventar”.

Esto fue así hasta la formulación por Schrodinger y Heisenberg de dos teorías coherentes y completas (además equivalentes como se demostró después).

Hay que subrayar que hoy día hay evidencias mucho más numerosas y mejores de la validez de teoría cuántica que las históricas.

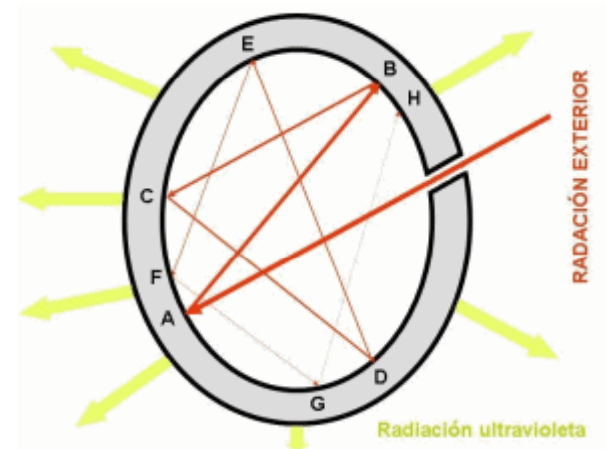
## 2. El cuerpo negro

Un “cuerpo negro” ideal es una cavidad cerrada con paredes conductoras a cierta temperatura  $T$ .

Los electrones de las paredes se mueven y emiten ondas electromagnéticas que se propagan por el interior la cavidad. Estas son absorbidas por otros puntos que a su vez también emiten de modo que se llega a un equilibrio térmico entre la radiación EM en el interior y los electrones de las paredes.

Se trata de determinar cuál es la energía EM que hay con frecuencia entre  $\omega$  y  $\omega + d\omega$

Para observarla se practica un agujero por el que sale una pequeña parte de la radiación del interior



El nombre “cuerpo negro” alude a que si está frío (a  $T$  ambiente o menor) toda la radiación que entra es absorbida tras varias reflexiones internas y no sale nada visible por el agujero (que se ve negro). Cuando está caliente (digamos a más de  $1000^{\circ}\text{C}$ ) la radiación es visible, de un color rojo, naranja, amarillo, blanco, azul, violeta etc cuanto más caliente está.

## Un “cuerpo negro” simplísimo: una cuerda tensa

Un cuerpo negro es un objeto 3D. Por simplificar (sólo la geometría, sin perder nada del contenido físico) vamos a considerar un caso 1D:

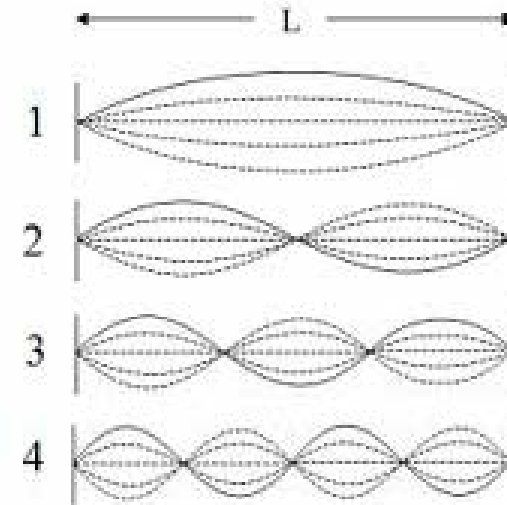
una cuerda tensa de longitud  $L$ .

Si la temperatura es  $T$  los extremos no son perfectamente fijos sino que se mueven al azar debido al movimiento térmico por lo que absorben o emiten ondas.

La perturbación más general posible es una combinación lineal de las ondas estacionarias o modos normales (sea  $c$  la velocidad de propagación)

$$L = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{c}{2\nu} = n \frac{c\pi}{\omega} = n \frac{\pi}{k}$$

La frecuencia fundamental:  $\omega_1 = \frac{c\pi}{L}; \lambda_1 = \frac{L}{2}$  otras:  $\omega_n = n \frac{c\pi}{L} = n\omega_1$



Cada modo normal de la cuerda se comporta como un oscilador armónico.

El promedio térmico de la energía de UN MODO, según el principio clásico de equipartición es  $k_B T$ , siendo  $k_B = R/N_A = 1.38 \times 10^{-23}$  J/K la cte de Boltzmann.

El número de modos con frecuencia entre  $\omega$  y  $\omega + d\omega$  (se sobreentiende que hay muchos en ese intervalo. Se multiplica por 2 por las dos posibles polarizaciones) es:

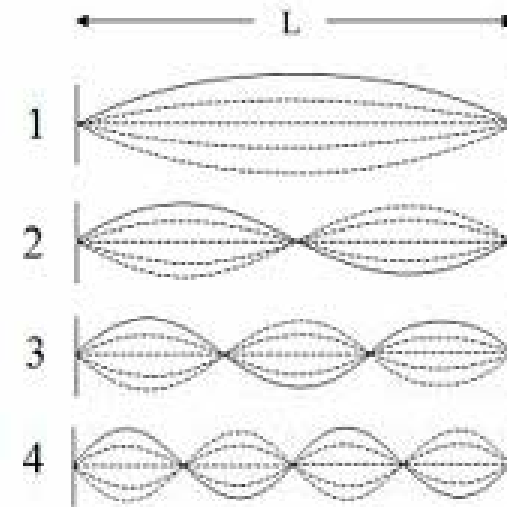
$$dn = 2 \times \frac{L}{\pi c} d\omega$$

La energía de las ondas entre  $\omega$  y  $\omega + d\omega$  (“densidad espectral”):

$$dE = k_B T \frac{2L}{\pi c} d\omega$$

La energía total (análoga a la fórmula de Rayleigh-Jeans) es:

$$E_T = \sum_{n=1}^{\infty} k_B T \cong \int_{\omega_1}^{\infty} k_B T \frac{2L}{\pi c} d\omega = k_B T \frac{2L}{\pi c} \int_{\omega_1}^{\infty} d\omega \rightarrow \infty !! \quad \text{“Catástrofe ultravioleta”}$$



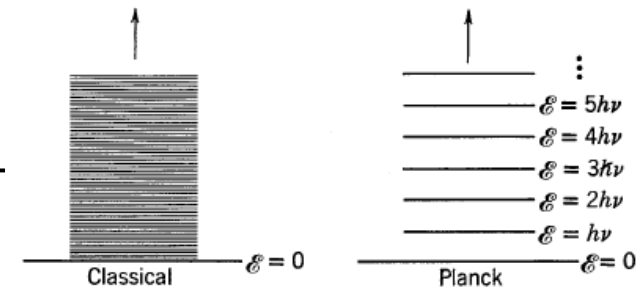
## Solución de Plank para evitar la catástrofe cuando $\omega \rightarrow \infty$

La idea es que para cada modo la energía no puede ser cualquiera, sino un número entero de veces un valor mínimo proporcional a la frecuencia.

Es decir, para uno cualquiera de los modos de frecuencia  $\omega$  la energía sólo puede ser uno de los valores que se obtienen dando a  $m$  un valor entero:

$$E = m\hbar\omega, \quad m \text{ entero } \geq 0$$

Para ese modo, la energía media térmica *ya no es*  $k_B T$



La estadística clásica de Boltzmann (véase Callen cap 16, el formalismo canónico) dice que un estado con energía  $E$  se alcanza aleatoriamente con una probabilidad:

$$p(E) = cte \times e^{-\frac{E}{k_B T}} \equiv \frac{1}{Z} e^{-\frac{E}{k_B T}} \quad \text{Siendo} \quad Z \equiv \sum_{\text{todas las } E \text{ posibles}} e^{-\frac{E}{k_B T}}$$

La energía media de ese modo es pues  $\langle E(\omega) \rangle = \sum E p(E) = \frac{1}{Z} \sum E e^{-\frac{E}{k_B T}}$

Si suponemos que las posibles energías son:  $E_m = m\hbar\omega$ ,  $m$  entero  $\geq 0$

La media es  $\langle E(\omega) \rangle = \frac{1}{Z} \sum m\hbar\omega e^{-\frac{m\hbar\omega}{k_B T}} = -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta} = -\frac{d(\ln Z)}{d\beta}$

Donde se ha definido  $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$

Es muy fácil calcular  $Z$  pues resulta ser la suma de una serie geométrica de primer término  $a_1 = 1$ , y razón  $r = e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}$

$$Z \equiv \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{m\hbar\omega}{k_B T}} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} = \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega\beta}}$$

También es muy simple hacer la derivada de  $\ln Z$  para obtener:

$$\langle E(\omega) \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \quad (\text{Fórmula de Einstein, ver que coincide con la clásica si } \hbar\omega \ll k_B T)$$

La clave es que para frecuencias muy altas  $\langle E(\omega) \rangle \rightarrow 0$ , porque la probabilidad de otro estado que no sea el fundamental cae exponencialmente a cero

Si queremos la energía total del sistema (en todos los modos) entre  $\omega$  y  $\omega + d\omega$

$$W_{1D}(\omega)d\omega = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} dn = \frac{2L}{\pi c} \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} d\omega$$

Donde 
$$W_{1D}(\omega) = \frac{2L}{\pi c} \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} d\omega$$

Que sería la distribución “de Planck” para un “cuerpo negro 1D”

La energía total de las ondas en equilibrio térmico sería:

$$U = \int_0^{\infty} W(\omega)d\omega = \frac{2L}{c} \int_0^{\infty} \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} d\omega = \frac{2L}{\pi c} \frac{k_B^2 T^2}{\hbar} \int_0^{\infty} \frac{xdx}{e^x - 1} = \frac{2L}{\pi c} \frac{k_B^2 T^2}{\hbar} \frac{\pi^2}{6}$$

El “truco” es que los modos con  $\omega$  grande casi no están poblados térmicamente, lo que evita la divergencia en la energía total.



## El cuerpo negro real 3D: una caja con radiación electromagnética en su interior

Supongamos que tenemos una caja cúbica de lado  $L$  (no hay diferencia práctica para otras formas de la cavidad).

Las ondas estacionarias con  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  deben cumplir:

$$L = \frac{l\pi}{k_x}; L = \frac{m\pi}{k_y}; L = \frac{n\pi}{k_z}$$

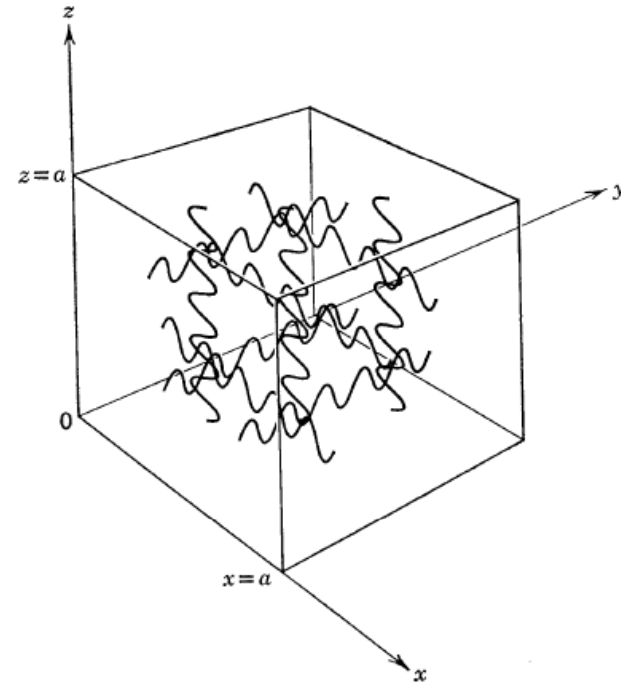
Las frecuencias son:

$$\omega(\mathbf{k}) = ck = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\pi c}{L}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \equiv \frac{\pi c}{L}N$$

El número de modos  $N_m$  con frecuencia igual o menor que  $\omega$  es el volumen de un octante de esfera de radio  $N$ . El número de ellos entre  $N$  y  $N+dN$  es

$$dN_m = 2 \times \frac{1}{8} 4\pi N^2 dN = 2 \times \frac{4\pi}{8} \frac{L^2 \omega^2}{\pi^2 c^2} \frac{L}{\pi c} d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega$$

2 polarizaciones



## El cuerpo negro real 3D: una caja con radiación electromagnética en su interior $\Pi = \text{“gas de fotones”}$

El número de modos es lo único que cambia respecto al caso 1 D

La energía entre  $\omega$  y  $\omega+d\omega$  es

Equipartición (Rayleigh-Jeans):  $dE = k_B T \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega$  Más catastrófico que 1D !!

Planck:  $dE = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$

$W_{3D}(\omega) = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$

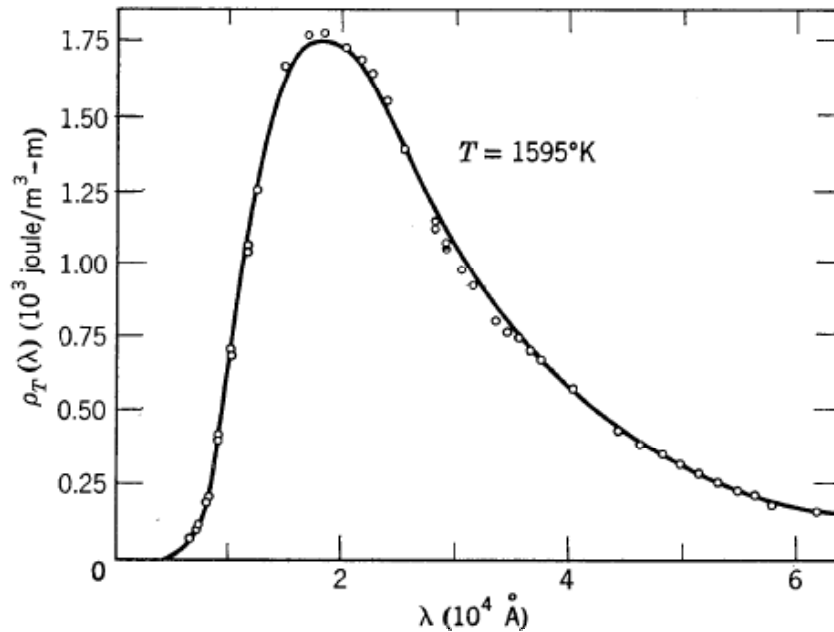
Energía total:

$$E = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^4 \left(\frac{\pi^4}{15}\right) = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} VT^4 = \frac{4\sigma}{c} VT^4$$

Cte de Stefan-Boltzmann:  $\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^3} = 5.67051(19) \times 10^{-8} \text{ J/m}^2 \text{K}^4$

Hay que decir que también las ondas elásticas en un sólido a baja temperatura obedecen a la distribución cuántica de Planck, reemplazando la velocidad de la luz por la de las ondas elásticas (**“fonones”**), y con 3 posibles polarizaciones (P. Debye, 1912)

## El cuerpo negro real 3D: Comparación Planck-experimento



Datos de WW Coblentz (1916).

La imagen habla por sí sola: el acuerdo es excelente.

Comentario sobre la constante de Planck (datos de 1986, Handbook of Chem & Phys.)

Planck usó frecuencias  $\nu$  en Hz y llamó a su constante:  $h = 6.626076(4) \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

Hoy se usa más frecuentemente:

(va con  $\omega$  en rad/s)

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.0545727(6) \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

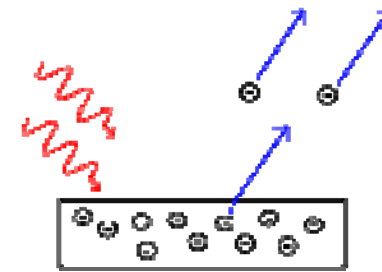
### 3. El efecto fotoeléctrico

**Consiste en** la emisión de electrones por algunos metales cuando incide sobre ellos radiación electromagnética. Observado por Hertz (1887), von Lenard (1902) y explicado por Einstein (1905) con argumentos cuánticos.

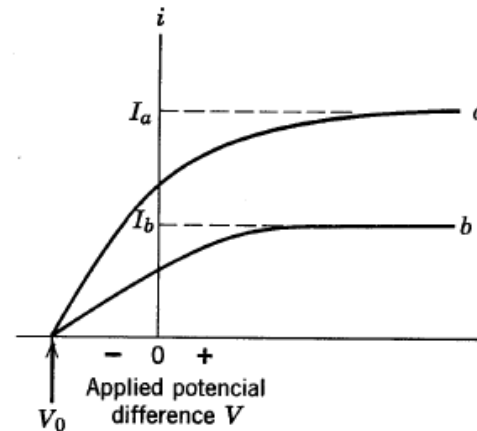
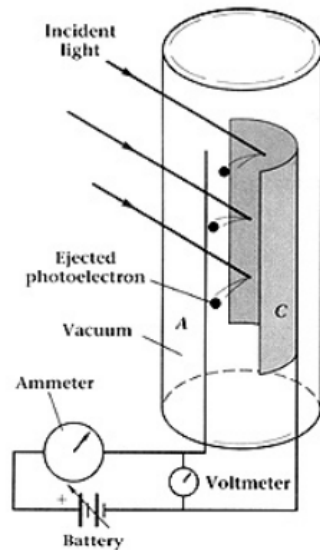
Comprobado con precisión por Millikan (1916)

**Explicación clásica:** La energía potencial del electrón ( $-E_0$ ) es menor dentro del metal que en el exterior. Al recibir la onda EM se pone a oscilar (efectúa oscilaciones forzadas por la fuerza EM de Lorentz) y va ganando energía poco a poco hasta que tiene la suficiente para escapar.

**No convence porque:** el número de electrones que saltan por segundo debería ser proporcional a la intensidad de la radiación, sin importar demasiado la frecuencia, pero se observa que por debajo de una frecuencia dada  $\nu_0$  no saltan electrones por muy intensa que sea la radiación.



## Montaje experimental



**Explicación** (Einstein 1905): Sea  $-E_0$  la energía potencial de los electrones dentro del metal. Cuando un electrón absorbe un “fotón” (la probabilidad de absorber más de uno a la vez es despreciable, como se verá en este curso) salta con una energía cinética:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = E_{foton} - E_0$$

1) Algunos electrones van bien dirigidos (la mayor cantidad de electrones se emite en la dirección normal a la superficie del metal) y alcanzan el ánodo, produciendo una corriente  $I$  medible, que es proporcional a la intensidad de radiación ( $n^\circ$  de fotones por segundo)

2) Si se aplica un voltaje + aumenta el número de electrones que alcanzan el ánodo hasta que TODOS lo alcanzan: saturación)

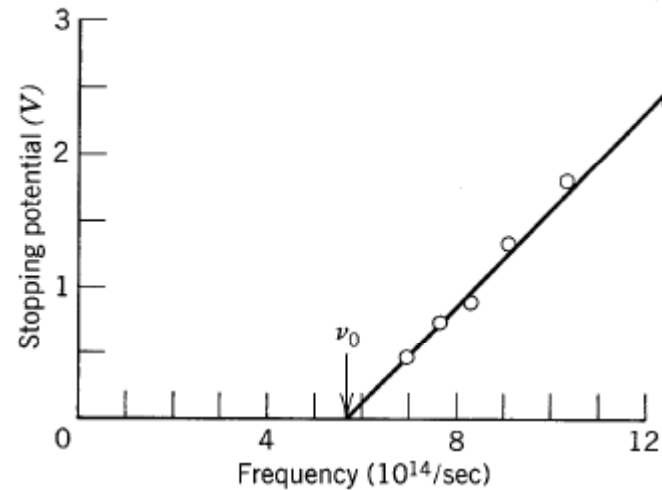
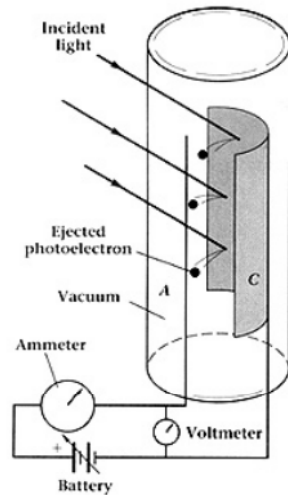
3) Si se aplica un voltaje - disminuye el número de electrones que alcanzan el ánodo hasta que  $I = 0$  cuando

$$eV_0 = E_k = E_{foton} - E_0$$

Porque ningún electrón puede tener energía suficiente para llegar al ánodo.

## Variación con la frecuencia de la radiación

Lo más interesante de todo resulta cuando hacemos el experimento con luces monocromáticas de distintas frecuencias.



$$eV_0 = E_{\text{foton}} - E_0$$

Si representamos el voltaje de frenado  $V_0(\nu)$  obtenido para cada frecuencia en función de  $\nu$  resulta una línea recta, es decir:  $eV_0 = h\nu - E_0$

Donde  $h = 6.62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  es una constante que resulta ser la misma que obtuvo Planck

Conclusión: la radiación está compuesta por partículas llamadas “fotones” cuya energía es  $E = h\nu$ , siendo  $h$  una constante universal.

## El efecto fotoeléctrico hoy

\* Ya no hace falta comprobar la teoría cuántica por billonésima vez (el experimento de Millikan fue merecedor del premio Nobel, hoy se hace en prácticas de Física General).

Hoy día se aprovecha el efecto para (por ejemplo, entre muchos):

\* **Células fotoeléctricas** que detectan un objeto cuando interrumpe un rayo de luz

\* Como **generador eléctrico alimentado por energía solar**. Un tipo de celdas fotovoltaicas se basan en la diferencia de potencial que ocurre cuando un fotón produce un par electrón-hueco (el electrón no salta al exterior sino a la banda de conducción) en el silicio. Una unión p-n evita la recombinación.

\* Los **fotodiodos** funcionan según el mismo principio, y son esenciales para convertir una señal propagada por fibra óptica en eléctrica, en el receptor.

\* La explicación de Einstein muestra también **por qué los teléfonos móviles no producen cáncer:**

La energía necesaria para romper un enlace del ADN es del orden de  $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$

La frecuencia de las microondas que usa el móvil es a lo sumo  $300 \text{ GHz} = 3 \times 10^{11} \text{ Hz}$ , por lo que la energía de un fotón es  $h\nu < 2 \times 10^{-22} \text{ J} = 1.2 \text{ meV}$ , **mil veces menos de lo necesario**.

Es muy poco probable que 2 fotones coincidan a la vez para romper un enlace y mucho menos aún 3 fotones...**pero se necesitarían 1000 fotones a la vez**.

En cambio los rayos UVA de frecuencia  $\nu \cong 1 \times 10^{15} \text{ Hz}$  tienen una energía de 4 eV, que **sí producen cáncer de piel** (en realidad están el límite de producir cáncer).

## 4. El efecto Compton (1923)

En su momento fue una confirmación del comportamiento corpuscular de la luz (“fotón”)

Supongamos un electrón (partícula cargada) en una región del espacio por el que viaja una onda EM plana, digamos por simplificar linealmente polarizada en el eje  $z$  y que se propaga en el eje  $x$ .

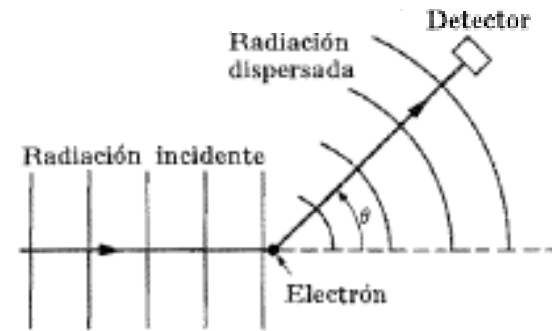


Fig. 1-10. Geometría de la dispersión Compton.

### Comportamiento clásico esperado:

Debido a la fuerza de Lorentz el electrón comienza a efectuar oscilaciones forzadas con la misma frecuencia  $\omega$  de la onda.

Por tanto es un **dipolo oscilante** que emite radiación en todas direcciones (menos en la  $z$ ) según la conocida fórmula del electromagnetismo clásico.

Este efecto se denomina dispersión elástica o Rayleigh.



**Efecto inesperado:** Cuando la onda incidente es de alta frecuencia (rayos X) si analizamos el espectro de la radiación detectada vemos se compone de DOS frecuencias distintas:

- 1) Una igual a la incidente, según Rayleigh
- 2) Otra, inexplicable clásicamente, de frecuencia menor: **efecto Compton**

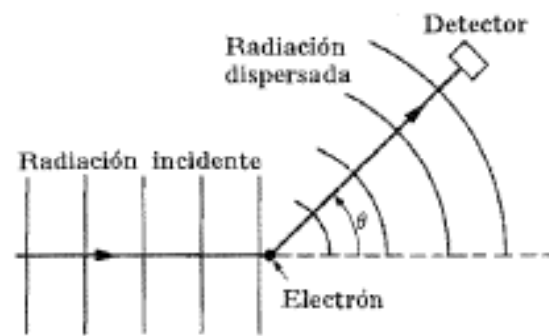
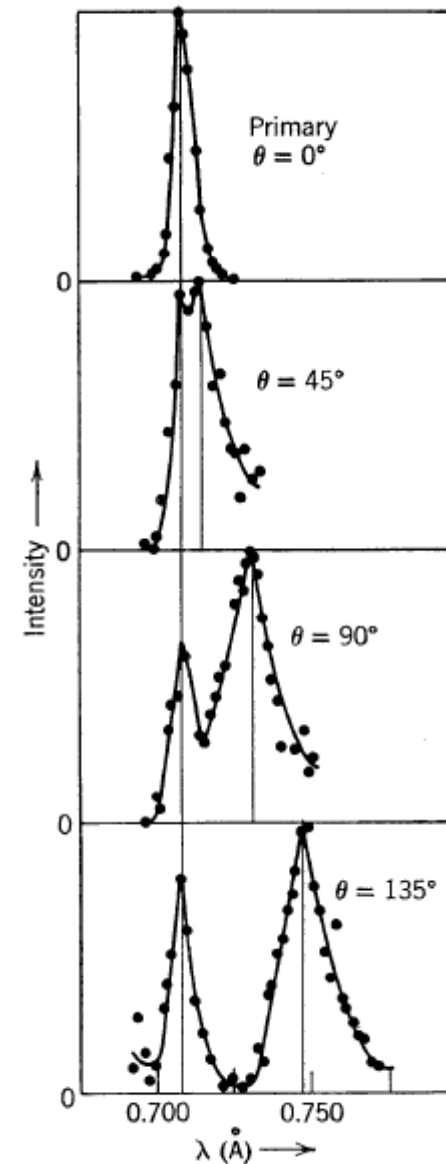


Fig. 1-10. Geometría de la dispersión Compton.

Resulta que la frecuencia de la segunda onda depende de la dirección en que se propaga, según la expresión:

$$\lambda' - \lambda = (1 - \cos\theta) \times 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$$

(Comprobarlo con los datos de la figura, la constante multiplicativa se llama  $\lambda_C$ )



# Explicación cuántica del efecto Compton

Supongamos la frecuencia de la onda incidente es  $\nu$

Si el electrón absorbe un fotón de frecuencia  $\nu$  (energía  $E$ ) y emite otro de frecuencia  $\nu'$  (energía  $E'$ ) debe conservarse la energía y el momento lineal (relativistas):

$$E + m_0c^2 = E' + mc^2 \quad (1)$$

$$\text{Y también: } \mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e \quad (2)$$

La energía y el momento del electrón están relacionadas por:

$$E_e = mc^2 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

Para un fotón ( $m_0 = 0$ )  $E = pc$ ,  $E' = p'c$

$$\text{De (2) obtenemos: } p_e^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 = p^2 + p'^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = \frac{1}{c^2} (E^2 + E'^2 - 2EE \cos\theta) \quad (3)$$

$$\text{Y de (1) : } E + m_0c^2 = E' + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4} \Rightarrow p_e^2 = \frac{1}{c^2} [E^2 + E'^2 + 2(E - E')m_0c^2 - 2EE] \quad (4)$$

$$\text{Igualando (3)=(4) y simplificando queda: } \frac{1}{E} - \frac{1}{E'} = \frac{1}{m_0c^2} (1 - \cos\theta)$$

Que coincide con el resultado experimental si  $E = h\nu$ ,  $\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 2.4283 \times 10^{-12} \text{ m}$

